

Вознюк А. Э.

Санкт-Петербургский государственный университет

Метод изоляции двумя шарами¹

Рекомендовано к публикации профессором Демьяновым В. Ф.

1. Постановка задачи. Даны два множества в n -мерном евклидовом пространстве

$$A = \{a_i \in \mathbb{R}^n \mid i \in I = \overline{1, N_1}\},$$

$$B = \{b_j \in \mathbb{R}^n \mid j \in J = \overline{1, N_2}\}.$$

Нужно изолировать элементы одного множества от элементов другого с минимальной ошибкой с помощью двух шаров так, чтобы как можно больше элементов множества A входило во внутренность шаров и как можно больше элементов множества B было вне шаров.

Задача сводится к оптимальному выбору центров $x_1 \in \mathbb{R}^n$ и $x_2 \in \mathbb{R}^n$ шаров и их радиусов $r_1 \in \mathbb{R}$ и $r_2 \in \mathbb{R}$:

$$S_1 = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x_1\| \leq r_1\},$$

$$S_2 = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x_2\| \leq r_2\}.$$

Такие задачи возникают в математической диагностике, в теории идентификации и распознавания образов.

2. Построение критериального функционала. Для оптимизации изоляции необходимо выбрать критерий для наилучшего разделения.

Положим $z = (x_1, x_2, r_1, r_2)$, $z \in \mathbb{R}^{2n+2}$. Построим функции

$$h_1(y, z) = \max \left\{ 0, \frac{1}{2} (\|y - x_1\|^2 - r_1^2) \right\},$$

$$h_2(y, z) = \max \left\{ 0, \frac{1}{2} (\|y - x_2\|^2 - r_2^2) \right\},$$

$$h(y, z) = \min \{h_1, h_2\},$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 12-01-00752

$$h_3(y, z) = \max \left\{ 0, \frac{1}{2} (r_1^2 - \|y - x_1\|^2), \frac{1}{2} (r_2^2 - \|y - x_2\|^2) \right\}.$$

Функция $h_1 = 0$, если точка y лежит внутри шара S_1 и $h_1 > 0$, если точка лежит вне S_1 . В этом случае значение $h_1(y, z)$ равно разности квадрата расстояния точки y до центра шара S_1 и квадрата радиуса этого шара.

Функция $h_2 = 0$, если точка y лежит внутри шара S_2 и $h_2 > 0$, если точка лежит вне S_2 . В этом случае значение $h_2(y, z)$ равно разности квадрата расстояния точки y до центра шара S_2 и квадрата радиуса этого шара.

Функция $h = 0$, если точка y лежит внутри одного из шаров и $h > 0$, если точка лежит вне обоих шаров. В этом случае значение $h(y, z)$ равно разности квадрата расстояния точки y до центра ближайшего шара и квадрата радиуса этого шара.

Функция $h_3 = 0$, если точка y лежит вне обоих шаров и $h_3(y, z) > 0$, если точка находится внутри шара. В этом случае значение $h_3(y, z)$ равно разности квадрата расстояния точки y до центра шара, в котором она находится, и квадрата радиуса этого шара (если точка y находится в обоих шарах, то выбирается максимальное значение).

Выберем правило идентификации. Пусть $c \in A \cup B$. Если $h(c, z) = 0$, то $c \in A$, если $h(c, z) > 0$, то $c \in B$.

Построим критериальный функционал

$$F(z) = \sum_{i \in I} h(a_i, z) + \sum_{j \in J} h_3(b_j, z).$$

Значение функционала F равно сумме описанных выше разностей для неверно определенных точек.

3. Минимизация критериального функционала. Для оптимальной изоляции множеств A и B нужно построить S_1 и S_2 , так, чтобы x_1, x_2, r_1, r_2 доставляли $F(z)$ минимальное значение. Функционал $F(z)$ является квазидифференцируемой функцией.

Рассмотрим случай, когда все a_i и b_j не лежат на границах шаров, в обоих шарах одновременно и на множестве

$$\|y - x_1\|^2 - r_1^2 = \|y - x_2\|^2 - r_2^2.$$

Это гиперплоскость

$$L = \{y \in \mathbb{R}^n \mid 2(y, x_1 - x_2) = \|x_2\|^2 - \|x_1\|^2 + r_1^2 - r_2^2\},$$

перпендикулярная отрезку, соединяющему центры шаров S_1 и S_2 (отрезок x_1x_2). Она пересекает этот отрезок в середине отрезка, концами которого являются пересечения отрезка x_1x_2 с границами шаров. Гиперплоскость L делит пространство R^n на полупространства Q_1 и Q_2 . $S_1 \subset Q_1, S_2 \subset Q_2$.

Пусть $\varphi_j = h_3(b_j)$, тогда

- если $r_1^2 < \|b_j - x_1\|^2$ и $r_2^2 < \|b_j - x_2\|^2$, то

$$\underline{\partial}\varphi_j = 0_{2n+2},$$

- если $r_1^2 > \|b_j - x_1\|^2$ и $r_2^2 < \|b_j - x_2\|^2$, то

$$\underline{\partial}\varphi_j = \{(-x_1 + b_j, 0_n, r_1, 0)^T\},$$

- если $r_1^2 > \|b_j - x_1\|^2$ и $r_2^2 > \|b_j - x_2\|^2$, то

$$\underline{\partial}\varphi_j = \{(0_n, -x_2 + b_j, 0, r_2)^T\}.$$

Пусть

$$\varphi = \sum_{j \in J} \varphi_j,$$

тогда субдифференциал имеет вид

$$\underline{\partial}\varphi = \sum_{j \in J} \underline{\partial}\varphi_j = \left\{ \left(\sum_{j \in J_1} (b_j - x_1), \sum_{j \in J_2} (b_j - x_2), N_1 r_1, N_2 r_2 \right)^T \right\},$$

где J_1 и J_2 — множество индексов j таких, что b_j входит соответственно в шары S_1 и S_2 ; N_1 и N_2 — мощности множеств J_1 и J_2 .

Супердифференциал $\bar{\partial}\varphi = 0_{2n+2}$.

Пусть $\psi_i = h(a_i)$, тогда

- если $r_1^2 > \|a_i - x_1\|^2$ или $r_2^2 > \|a_i - x_2\|^2$, то

$$\underline{\partial}\psi_i = 0_{2n+2},$$

- если $r_1^2 < \|a_i - x_1\|^2$, $r_2^2 < \|a_i - x_2\|^2$
и $\|a_i - x_1\|^2 - r_1^2 < \|a_i - x_2\|^2 - r_2^2$, то

$$\underline{\partial}\psi_i = \{(x_1 - a_i, 0_n, -r_1, 0)^T\},$$

- если $r_1^2 < \|a_i - x_1\|^2$, $r_2^2 < \|a_i - x_2\|^2$
и $\|a_i - x_1\|^2 - r_1^2 > \|a_i - x_2\|^2 - r_2^2$, то

$$\underline{\partial}\psi_i = \{(0_n, -x_2 + b_j, 0, r_2)^T\}.$$

Пусть

$$\psi = \sum_{i \in I} \psi_i,$$

тогда субдифференциал имеет вид

$$\underline{\partial}\psi = \sum_{i \in I} \underline{\partial}\psi_i = \left\{ \left(\sum_{i \in I_1} (x_1 - a_i), \sum_{i \in I_2} (x_2 - a_i), -M_1 r_1, -M_2 r_2 \right)^T \right\},$$

где I_1 — множество индексов i таких, что

$$\|a_i - x_1\|^2 - r_1^2 < \|a_i - x_2\|^2 - r_2^2,$$

I_2 — множество индексов i , таких, что

$$\|a_i - x_1\|^2 - r_1^2 > \|a_i - x_2\|^2 - r_2^2,$$

M_1 и M_2 — мощности множеств I_1 и I_2 .

Супердифференциал $\bar{\partial}\psi = 0_{2n+2}$. В итоге

$$\underline{\partial}F = \underline{\partial}\psi + \underline{\partial}\varphi,$$

$$\underline{\partial}F = \left\{ \left(\sum_{i \in I_1} (x_1 - a_i) - \sum_{j \in J_1} (x_1 - b_j), \sum_{i \in I_2} (x_2 - a_i) - \sum_{j \in J_2} (x_2 - b_j), \right. \right. \\ \left. \left. N_1 r_1 - M_1 r_1, N_2 r_2 - M_2 r_2 \right)^T \right\},$$

$$\bar{\partial}F = 0_{2n+2}.$$

Необходимое условие минимума[1]

$$-\bar{\partial}F \subset \underline{\partial}F.$$

В нашем случае, для того, чтобы функционал F принимал минимальное значение, необходимо выполнение следующих равенств

$$\sum_{i \in I_1} (x_1 - a_i) = \sum_{j \in J_1} (x_1 - b_j), \quad \sum_{i \in I_2} (x_2 - a_i) = \sum_{j \in J_2} (x_2 - b_j),$$

$$N_1 r_1 = M_1 r_1, \quad N_2 r_2 = M_2 r_2.$$

Раскрывая суммы в первых двух равенствах и переписывая третье и четвертое равенства в виде $N_1 = M_1, N_2 = M_2$, получаем

$$\sum_{i \in I_1} a_i = \sum_{j \in J_1} b_j, \quad \sum_{i \in I_2} a_i = \sum_{j \in J_2} b_j$$

или

$$\frac{1}{M_1} \sum_{i \in I_1} a_i = \frac{1}{N_1} \sum_{j \in J_1} b_j, \quad \frac{1}{M_2} \sum_{i \in I_2} a_i = \frac{1}{N_2} \sum_{j \in J_2} b_j.$$

4. Заключение. В данной работе получен критерий минимума функционала F (критерий оптимальной изоляции двумя шарами). Центр масс неверно определенных точек множества A , расположенных в полупространстве Q_1 , совпадает с центром масс неверно определенных точек множества B , лежащих внутри S_1 , а центр масс неверно определенных точек множества A , расположенных в полупространстве Q_2 , совпадает с центром масс неверно определенных точек множества B , лежащих внутри S_2 .

Литература

1. Демьянов В. Ф., Васильев Л. В. Нелинтеренцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981. 376 с.

Волкова А. С.

Воронежский государственный университет

Обобщенные решения краевой задачи для уравнения параболического типа на произвольном графе

Рекомендовано к публикации профессором Провоторовым В. В.

В [1, 2] рассмотрены краевые задачи для эллиптического уравнения на графе и представлены условия единственности и существования решения этих задач. Ниже рассматриваются вопросы однозначной разрешимости краевых задач для параболического уравнения на графе. Полученные результаты используются при решении задач граничного управления в классе обобщенных решений.

1. Основные понятия и обозначения. Рассмотрим связный компактный граф-дерево Γ с корнем ξ_0 , множеством узлов $V = \{\xi_0, \dots, \xi_m\}$ и множеством ребер $\mathfrak{R} = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$; длина каждого ребра равна единице. Здесь и ниже будем придерживаться обозначений, принятых в монографии [3]. Узел называется граничным, если он принадлежит только одному ребру (граничное ребро), все остальные узлы и ребра — внутренние; множество граничных узлов обозначим через $\partial\Gamma$, $J(\Gamma)$ — множество внутренних узлов: $V = \partial\Gamma \cup J(\Gamma)$. Обозначим через Γ_0 объединение всех ребер, не содержащих концевых точек, $\Gamma_T = \Gamma_0 \times (0, T)$ ($\Gamma_t = \Gamma_0 \times (0, t)$), $\partial\Gamma_T = \partial\Gamma \times (0, T)$ и $\Gamma_{\{t_0\}} = \Gamma_0 \times \{t_0\}$ — сечение области Γ_T плоскостью $t = t_0$, $t_0 \in (0, T)$.

Естественным образом вводится частичная упорядоченность на Γ : для двух точек a_1 и a_2 определено отношение $a_1 \leq a_2$, если a_1 лежит на единственном пути, соединяющем корень ξ_0 с a_2 . Обозначим через $[\omega, \varpi] = \{z \in \Gamma : \omega \leq z \leq \varpi\}$ и если $[\omega, \varpi]$ — ребро γ , то ω — начальная точка γ , ϖ — конечная точка γ . Объединение всех ребер, не содержащих концевых точек, обозначим через Γ_0 : $\Gamma_0 = \Gamma \setminus V$; под $\bar{\Gamma}_0$ понимается несвязное объединение всех ребер — замкнутых отрезков. Для каждого внутреннего узла ξ обозначим через $R(\xi)$ множество ребер, выходящих из ξ . Для любого узла $\xi \in V$ длина пути, соединяющего корень ξ_0 с ξ является целым неотрицательным числом, обозначим его через $|\gamma|$ и назовем порядком узла ξ . Пусть $V^{(\nu)} = \{\xi \in V : |\xi| = \nu\}$ — множество узлов порядка ν .

Занумеруем узлы графа Γ следующим образом: $\partial\Gamma = \{\xi_0, \dots, \xi_p\}$, $\xi_{p+1} \in V^{(1)}$, а $\xi_j, j > p + 1$, занумерованы в порядке возрастания $|\xi_j|$, $J(\Gamma) = \{\xi_{p+1}, \dots, \xi_m\}$. Аналогично занумерованы ребра: $\gamma_k, k = \overline{1, p+1}$ — граничные ребра ($\gamma_{p+1} = [\xi_0, \xi_{p+1}]$), $\gamma_k = [\xi_{k_j}, \xi_k], k = \overline{p+2, m}, k_j < k$ — внутренние ребра. Каждое ребро $\gamma \in \mathfrak{R}$ параметризуется отрезком $[0, 1]$. Ориентацию на ребрах удобно выбрать следующим образом: если $\gamma = [\omega, \varpi]$, то узлу ω соответствует число 1, узлу ϖ — число 0.

Пусть Γ — произвольный связный компактный граф, содержащий циклы. В каждом цикле фиксируется ребро и ему принадлежащий узел. Формальное разъединение графа по таким узлам, оставляющее граф связным, превращает его в «дерево». Ориентация и параметризация, а также нумерация узлов и ребер полученного графа приведены выше. Внутренний узел произвольного графа может иметь более одного входящего в него ребра в отличие от внутреннего узла графа-дерева, имеющего только одно входящее в него ребро. Аналогично обозначению множества $R(\xi)$ ребер, выходящих из внутреннего узла ξ , через $r(\xi)$ обозначим множество ребер, входящих в узел ξ .

Сужение функции $f(x)$ ($f(x, t)$) на ребро γ_k будем обозначать через $f(x)_{\gamma_k}$ ($f(x, t)_{\gamma_k}$). Интеграл от функции $f(x)$ ($f(x, t)$) по области Γ (Γ_T) понимается как

$$\int_{\Gamma} f(x) dx = \sum_{k=1}^m \int_{\gamma_k} f(x)_{\gamma_k} dx,$$

$$\int_{\Gamma_T} f(x, t) dx dt = \sum_{k=1}^m \int_{\gamma_k \times (0, T)} f(x, t)_{\gamma_k} dx dt.$$

Через $L_2(\Gamma)$ обозначим пространство функций, интегрируемых с квадратом на Γ . Пространство функций $u(x) \in L_2(\Gamma)$, имеющих обобщенную производную k -го порядка ($k = 1, 2$) обозначим через $W_2^k(\Gamma)$. Для цилиндра Γ_T аналогично вводятся пространства $L_2(\Gamma_T)$ и $W_2^1(\Gamma_T)$.

Через $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ обозначим пространство функций $u(x, t) \in L_2(\Gamma_T)$, имеющих обобщенные производные первого порядка по x , которые принадлежат $L_2(\Gamma_T)$. Норма $\|\cdot\|_{W_2^{1,0}(\Gamma_T)}$ в $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ определяется

скалярным произведением

$$(u, v)_{W_2^{1,0}(\Gamma_T)} \equiv \int_{\Gamma_T} \left(uv + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dt.$$

Через $W_2^1(\Gamma_T)$ обозначим пространство функций $u(x, t) \in L_2(\Gamma_T)$, имеющих обобщенные производные первого порядка по x и по t , которые принадлежат $L_2(\Gamma_T)$. Норма $\|\cdot\|_{W_2^1(\Gamma_T)}$ в $W_2^1(\Gamma_T)$ определяется скалярным произведением

$$(u, v)_{W_2^1(\Gamma_T)} \equiv \int_{\Gamma_T} \left(uv + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dt.$$

Через $V_2(\Gamma_T)$ обозначим пространство, состоящее из всех элементов $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$, имеющих конечную норму вида

$$\|u\|_{V_2(\Gamma_T)} \equiv \text{vrai} \max_{0 \leq t \leq T} \|u(x, t)\|_{L_2(\Gamma)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L_2(\Gamma_T)}. \quad (1)$$

Пространство $V_2^{1,0}(\Gamma_T)$ состоит из всех элементов $u \in V_2(\Gamma_T)$, сильно непрерывных по t в норме $L_2(\Gamma)$, т.е. таких, что $\|u(x, t + \Delta t) - u(x, t)\|_{L_2(\Gamma)} \rightarrow 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$ равномерно на $(0, T)$.

Введем необходимые подпространства пространств $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$, $W_2^1(\Gamma_T)$ и $V_2(\Gamma_T)$.

Обозначим через $\Omega(\Gamma_T, J(\Gamma))$ множество элементов пространства $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$, чьи следы определены на всех сечениях $\Gamma_{\{t_0\}}$ как функции класса $L_2(\Gamma)$ и непрерывны по $t \in (0, T)$ в норме $L_2(\Gamma)$, а также выполняются следующие соотношения [4]

$$\begin{aligned} & \sum_{\gamma_j \in R(\xi)} a(1)_{\gamma_j} \frac{\partial u(1, t)_{\gamma_j}}{\partial x} + A_\xi u(0, t)_{\gamma_j} = \\ & = \sum_{\gamma_j \in r(\xi)} a(0)_{\gamma_j} \frac{\partial u(0, t)_{\gamma_j}}{\partial x} + B_\xi u(0, t)_{\gamma_j}, \quad \xi \in J(\Gamma), \quad t \in (0, T) \end{aligned} \quad (2)$$

где $a(x)$ — некоторая измеримая и ограниченная на Γ функция, A_ξ и B_ξ — фиксированные для каждого узла $\xi \in J(\Gamma)$ неотрицательные постоянные.

Через $\Omega_0(\Gamma_T, J(\Gamma))$ обозначим множество функций из $\Omega(\Gamma_T, J(\Gamma))$, обращающихся в нуль на $\partial\Gamma_T$. Пусть $W_2^{1,0}(\Gamma_T, J(\Gamma))$, $W_{2,0}^{1,0}(\Gamma_T, J(\Gamma))$ — замыкания $\Omega(\Gamma_T, J(\Gamma))$, $\Omega_0(\Gamma_T, J(\Gamma))$ по норме $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$, соответственно.

Обозначим через $\tilde{\Omega}(\Gamma_T, J(\Gamma))$ множество элементов пространства $W_2^1(\Gamma_T)$, чьи следы определены на всех $\Gamma_{\{t_0\}}$, как функции класса $L_2(\Gamma)$, и непрерывны по $t \in (0, T)$ в норме $L_2(\Gamma)$, а также выполняются соотношения (2); $\tilde{\Omega}_0(\Gamma_T, J(\Gamma))$ — множество функций из $\tilde{\Omega}(\Gamma_T, J(\Gamma))$, обращающихся в нуль на $\partial\Gamma_T$; $\tilde{\Omega}(\Gamma_T, V)$ — множество элементов пространства $W_2^1(\Gamma_T)$, чьи следы определены на всех $\Gamma_{\{t_0\}}$, как функции класса $L_2(\Gamma)$, и непрерывны по $t \in (0, T)$ в норме $L_2(\Gamma)$, а также выполняются соотношения (2). Пространства $W_2^1(\Gamma_T, J(\Gamma))$, $W_{2,0}^1(\Gamma_T, J(\Gamma))$ и $W_2^1(\Gamma_T, V)$ — замыкания $\tilde{\Omega}(\Gamma_T, J(\Gamma))$, $\tilde{\Omega}_0(\Gamma_T, J(\Gamma))$ и $\tilde{\Omega}(\Gamma_T, V)$ по норме $W_2^1(\Gamma_T)$, соответственно.

Через $V_2(\Gamma_T, J(\Gamma))$ ($V_2(\Gamma_T, V)$) обозначим пространство, состоящее из всех элементов $W_2^{1,0}(\Gamma_T, J(\Gamma))$ ($W_2^{1,0}(\Gamma_T, V)$), имеющих конечную норму (1); пространство $V_2^{1,0}(\Gamma_T, J(\Gamma))$ ($V_2^{1,0}(\Gamma_T, V)$) состоит из всех элементов $u \in V_2(\Gamma_T, J(\Gamma))$ ($u \in V_2(\Gamma_T, V)$), сильно непрерывных по t в норме $L_2(\Gamma)$, а $V_{2,0}^{1,0}(\Gamma_T, J(\Gamma))$ — пересечение $V_2^{1,0}(\Gamma_T, J(\Gamma))$ и $W_{2,0}^{1,0}(\Gamma_T, J(\Gamma))$.

2. Обобщенные решения из класса $V_2^{1,0}(\Gamma_T)$. Для уравнения

$$(\mathbb{L}u)(x, t) \equiv \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) + b(x)u(x, t) = f(x, t) \quad (3)$$

рассмотрим задачу нахождения решения $u(x, t)$ в области $\overline{\Gamma_T}$, удовлетворяющего начальному

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \Gamma \quad (4)$$

и краевому условию

$$u|_{\partial\Gamma} = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5)$$

а также общую краевую задачу, в которой краевое условие имеет вид

$$\begin{aligned} \left(a(0) \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} + h_j u(0, t) \right)_{\gamma_j} &= 0, \quad j = \overline{1, p}, \\ \left(a(1) \frac{\partial u(1, t)}{\partial x} - H u(1, t) \right)_{\gamma_{p+1}} &= 0, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $\varphi(x) \in L_2(\Gamma)$, $f(x, t) \in L_{2,1}(\Gamma_T)$, $h_j, j = \overline{1, p}$, H — фиксированные положительные постоянные. Пространство $L_{2,1}(\Gamma_T)$ состоит из всех элементов $L_1(\Gamma_T)$ с конечной нормой

$$\|f\|_{L_{2,1}(\Gamma_T)} = \int_0^T \left(\int_{\Gamma} f^2(x, t) dx \right) dt.$$

Коэффициенты $a(x), b(x)$ — измеримые ограниченные функции на Γ , а именно:

$$0 < a_* \leq a(x) \leq a^*, \quad |b(x)| \leq \tilde{b}, \quad x \in \Gamma. \quad (7)$$

Определение 1. класса $V_2^{1,0}(\Gamma_T)$ краевой задачи (3)–(5) называется функция $u(x, t) \in V_{2,0}^{1,0}(\Gamma_T, J(\Gamma))$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} u(x, t) \eta(x, t) dx + \int_{\Gamma_T} \left(-u \frac{\partial \eta}{\partial t} + a(x) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + b(x) u(x, t) \eta(x, t) \right) dx dt = \\ = \int_{\Gamma} \varphi \eta(x, 0) dx + \int_{\Gamma_T} f \eta dx dt \end{aligned}$$

при любой $\eta(x, t) \in W_{2,0}^1(\Gamma_T, J(\Gamma))$ и $t \in [0, T]$.

Определение 2. Обобщенным решением класса $V_2^{1,0}(\Gamma_T)$ краевой задачи (3), (4), (6) называется функция $u(x, t) \in V_2^{1,0}(\Gamma_T, V)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} u(x, t) \eta(x, t) dx + \int_{\Gamma_t} \left(-u \frac{\partial \eta}{\partial t} + a(x) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + b(x) u(x, t) \eta(x, t) \right) dx dt + \\ + \sum_{j=1}^p \int_0^t h_j (u(0, t) \eta(0, t))_{\gamma_j} dt + \int_0^t H (u(1, t) \eta(1, t))_{\gamma_{p+1}} dt = \\ = \int_{\Gamma} \varphi \eta(x, 0) dx + \int_{\Gamma_t} f \eta dx dt \end{aligned}$$

при $\eta(x, t) \in W_2^1(\Gamma_T, V)$ и $t \in [0, T]$.

Для краевой задачи (3)–(5) ((3), (4), (6)) справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Краевая задача (3)–(5) ((3), (4), (6)) имеет обобщенное решение из $V_{2,0}^{1,0}(\Gamma_T, J(\Gamma))$ ($V_2^{1,0}(\Gamma_T, V)$), если выполнены предположения (7).

Теорема 2. Краевая задача (3)–(5) ((3), (4), (6)) однозначно разрешима в пространстве $V_{2,0}^{1,0}(\Gamma_T, J(\Gamma))$ ($V_2^{1,0}(\Gamma_T, V)$) при любых $f(x, t) \in L_{2,1}(\Gamma_T)$ и $\varphi(x) \in L_2(\Gamma)$, если выполнены предположения (7).

Доказательства теорем опираются на аналогичные утверждения, представленные в [5, гл. 3, §3]. Получены оценки решения класса $V_2^{1,0}(\Gamma_T)$ через нормы функций $f(x, t)$ и $\varphi(x)$, при этом используются предположения (7).

Литература

1. Волкова А. С. Обобщенные решения для эллиптического уравнения в задачах граничного управления на геометрическом графе // Процессы управления и устойчивость: Труды 43-й международной научной конференции аспирантов и студентов / Под ред. А. С. Ерёмкина, Н. В. Смирнова. СПб.: Издат. Дом С.-Петерб. гос. ун-та, 2012. С. 14–20.
2. Волкова А. С. Обобщенное решение краевой задачи для эллиптического уравнения на графе // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета, 2012. № 1. С. 28–29.
3. Юрко В. А. Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007. 384 с.
4. Провоторов В. В., Махинова О. А. Краевые задачи для уравнений с распределенными параметрами на графах. Воронеж: Научная книга, 2013. 133 с.
5. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Физматлит, 1973. 408 с.

Гнилицкая Ю. А.

Воронежский государственный университет

Построение граничного управления колебаниями системы струн в классе обобщенных решений

Рекомендовано к публикации профессором Провоторовым В. В.

В настоящей работе обосновывается существование граничных управляющих воздействий и представлен метод их нахождения в модельной задаче управления колебаниями упругой системы из m струн, закрепленных по типу графа-звезды (ниже Γ). Задача состоит в переводе дифференциальной системы из заданного начального состояния в заданное финальное состояние. Задача управления рассматривается в классе $W_{\frac{1}{2}}^1(\Gamma_T)$, $\Gamma_T = \Gamma \times (0, T)$. Здесь $W_{\frac{1}{2}}^1(\Gamma_T)$ — пространство функций $u(x, t) \in L_2(\Gamma_T)$, имеющих обобщенные производные первого порядка также из $L_2(\Gamma_T)$. Для упрощения полученных формул длины ребер графа кратны π , волновое уравнение используется в простейшей форме: $u_{tt} = u_{xx}$. Главный результат исследования представлен в виде формул, определяющих искомые граничные управления как функции времени.

1. Общие понятия и предложения. Пусть Γ — граф-звезда, состоящий из m одинаковых ребер γ_k и одного внутреннего узла ξ ; $\partial\Gamma_T$ — множество граничных узлов графа Γ . При этом ребра γ_k , $k = \overline{1, m-1}$, параметризованы отрезком $[0, \pi/2]$ (ориентация на ребрах к узлу « ξ »), ребро γ_m — отрезком $[\pi/2, \pi]$ (ориентация на ребре — «от узла ξ »).

Пространство функций $u(x) \in L_2(\Gamma)$, имеющих обобщенную производную первого порядка, обозначим через $W_{\frac{1}{2}}^1(\Gamma)$, норма $\|\cdot\|_{W_{\frac{1}{2}}^1(\Gamma)}$ определяется скалярным произведением

$$(u, v)_{W_{\frac{1}{2}}^1(\Gamma)} = \int_{\Gamma} \left(uv + \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} \right) dx,$$

а норма $\|\cdot\|_{W_{\frac{1}{2}}^1(\Gamma_T)}$ — скалярным произведением

$$(u, v)_{W_{\frac{1}{2}}^1(\Gamma_T)} = \int_{\Gamma_T} \left(uv + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dt.$$

Все дальнейшие рассуждения будут происходить в множестве функций, равных нулю на $\partial\Gamma_T$, которое является подпространством

$W_2^1(\Gamma_T)$. Для таких функций удобно ввести скалярное произведение

$$[u, v]_{W_2^1(\Gamma_T)} = \int_{\Gamma_T} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dt,$$

порождающее норму, эквивалентную введенной выше норме.

2. Обобщенные решения. Обозначим через $C(\Gamma)$ множество непрерывных на Γ функций, $C[\Gamma]$ — множество кусочно-непрерывных функций (непрерывность на каждом ребре, в узле ξ непрерывность не обязательна), $C^2[\Gamma]$ — множество функций, все производные которых до второго порядка включительно принадлежат $C[\Gamma]$.

Колебания $U(x, t)$ системы m струн на каждом из ребер графа Γ при произвольном значении времени $t \in (0, T)$ описываются уравнениями

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} U(x, t)_{\gamma_k} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x, t)_{\gamma_k} \quad (1)$$

внутри каждого ребра γ_k , $k = \overline{1, m-1}$, и соотношениями в узле ξ (условия непрерывности и гладкости)

$$\begin{aligned} U\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_k} &= U\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_m}, \quad k = \overline{1, m-1}, \\ \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial}{\partial x} U\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_k} &= \frac{\partial}{\partial x} U\left(\frac{\pi}{2}, t\right)_{\gamma_m}, \quad t \in (0, T). \end{aligned} \quad (2)$$

К ним добавляются начальные условия при $x \in \Gamma$, $t = 0$:

$$U(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} U(x, 0) = \psi(x), \quad (3)$$

и финальные условия при $x \in \Gamma$, $t = T$:

$$U(x, T) = \tilde{\varphi}(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} U(x, T) = \tilde{\psi}(x), \quad (4)$$

а также граничные условия в узлах множества $\partial\Gamma$:

$$U(0, t)_{\gamma_k} = \mu_k(t), \quad k = \overline{1, m-1}, \quad U(\pi, t)_{\gamma_m} = \nu(t), \quad t \in [0, T]. \quad (5)$$

Здесь $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\tilde{\varphi}(x)$, $\tilde{\psi}(x)$ — заданные функции, $\mu_k(t)$, $\nu(t)$ — управляющие функции.

Задачи (1)–(3), (5) и (1), (2), (4), (5) подробно рассмотрены в [1, 2]. Для задач (1)–(3), (5) и (1), (2), (4), (5) введем понятие обобщенного (слабого) решения класса $W_2^1(\Gamma_T)$.

Обозначим через $\Omega(\xi, \Gamma)$ множество непрерывных в узле ξ функций $u(x)$ класса $W_2^1(\Gamma)$, для которых сужение $\frac{\partial u(x)_{\gamma_k}}{\partial x}$ непрерывно во

всех концевых точках ребер γ_k , $k = \overline{1, m}$, принадлежащих узлу ξ , и имеет место соотношение $\sum_{k=1}^{m-1} \frac{d}{dx} u(\frac{\pi}{2})_{\gamma_k} = \frac{d}{dx} u(\frac{\pi}{2})_{\gamma_m}$; $\Omega_0(\xi, \Gamma_T)$ — множество функций $u(x, t) \in \Omega(\xi, \Gamma)$ для фиксированного $t \in (0, T)$ и непрерывных по t в норме $L_2(\Gamma)$. Пусть $\Omega_0(\xi, \Gamma)$, $\Omega_0(\xi, \Gamma_T)$ — множества функций из $\Omega(\xi, \Gamma)$, $\Omega(\xi, \Gamma_T)$, обращающихся в нуль на $\partial\Gamma$, соответственно. Замыкания множеств $\Omega_0(\xi, \Gamma)$, $\Omega_0(\xi, \Gamma_T)$ по нормам пространств $W_{2,0}^1(\Gamma)$ и $W_{2,0}^1(\Gamma_T)$ обозначим через $W_{2,0}^1(\xi, \Gamma)$ и $W_{2,0}^1(\xi, \Gamma_T)$: $W_{2,0}^1(\xi, \Gamma) \subset W_{2,0}^1(\Gamma)$, $W_{2,0}^1(\xi, \Gamma_T) \subset W_{2,0}^1(\Gamma_T)$.

Определение 1. Обобщенным решением (слабым решением) класса $W_{2,0}^1(\Gamma_T)$ краевой задачи (1)–(3), (5) называется функция $u(x, t) \in W_{2,0}^1(\xi, \Gamma_T)$, равная $\varphi(x)$ при $t = 0$ и удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int_{\Gamma_T} (-u_t \eta_t + u_x \eta_x) dx dt - \int_{\Gamma} \psi(x) \eta(x, 0) dx = 0 \quad (6)$$

при любых $\eta \in \widehat{W}_{2,0}^1(\xi, \Gamma_T)$, где $\widehat{W}_{2,0}^1(\xi, \Gamma_T)$ — множество элементов $W_{2,0}^1(\xi, \Gamma_T)$, равных нулю при $t = T$.

Определение 2. Обобщенным решением (слабым решением) класса $W_{2,0}^1(\Gamma_T)$ краевой задачи (1), (2), (4), (5) называется функция $u(x, t) \in W_{2,0}^1(\xi, \Gamma_T)$, равная $\tilde{\varphi}(x)$ при $t = T$ и удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int_{\Gamma_T} (-u_t \eta_t + u_x \eta_x) dx dt + \int_{\Gamma} \tilde{\psi}(x) \eta(x, T) dx = 0 \quad (7)$$

при любых $\eta \in \widetilde{W}_{2,0}^1(\xi, \Gamma_T)$, где $\widetilde{W}_{2,0}^1(\xi, \Gamma_T)$ — множество элементов $W_{2,0}^1(\xi, \Gamma_T)$, равных нулю при $t = 0$.

3. Однозначная разрешимость краевых задач. Обратимся к вопросу слабой разрешимости краевых задач (1)–(3), (5) и (1), (2), (4), (5) в пространстве $W_{2,0}^1(\xi, \Gamma_T)$. Для удобства дальнейшего изложения сведем известной заменой граничные условия обеих задач к нулю и представим задачи (1)–(3), (5) и (1), (2), (4), (5) в следующем виде ($U(x, t)$ заменена на $u(x, t)$):

$$\mathbb{L}u = f, \quad u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), u|_{\partial\Gamma_T} = 0, \quad (8)$$

$$\mathbb{L}u = \tilde{f}, \quad u(x, T) = \tilde{\varphi}(x), u_t(x, T) = \tilde{\psi}(x), u|_{\partial\Gamma_T} = 0, \quad (9)$$

где $\mathbb{L}u = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)$.

Пусть $\varphi, \tilde{\varphi} \in W_{2,0}^1(\xi, \Gamma)$, $\psi, \tilde{\psi} \in L_2(\Gamma)$ и $f, \tilde{f} \in L_{2,1}(\Gamma_T)$. Пространство $L_{2,1}(\Gamma_T)$ состоит из всех элементов $L_1(\Gamma_T)$ с конечной нормой

$$\|f\|_{L_{2,1}(\Gamma_T)} = \int_0^T \left(\int_{\Gamma} f^2(x, t) dx \right)^{1/2} dt.$$

Теорема 1. Краевая задача (8) однозначно разрешима в пространстве $W_{2,0}^1(\xi, \Gamma_T)$.

Вначале показывается, что краевая задача (8) имеет не более одного обобщенного решения из $W_{2,0}^1(\xi, \Gamma_T)$, т. е. показывается, что разность двух обобщенных решений задачи (8) $u = u_1 - u_2$ равна нулю. Рассмотрим функцию $\eta(x, t) \in \widehat{W}_{2,0}^1(\xi, \Gamma_T)$, равную $\int_{\tau}^t u(x, \tau) d\tau$ при $0 \leq t \leq \tau$ и нулю при $\tau \leq t \leq T$, где τ — какое-либо из $[0, T]$. После подстановки $\eta(x, t)$ в (6) и последующего интегрирования получаем $u(x, t) = 0$ на $[0, T]$. Существование решения краевой задачи (8) показывается методом Галеркина. Рассматривается приближенное решение $u^N(x, t)$ задачи (8) в виде $u^N(x, t) = \sum_{n=1}^N c_n^N(t) u_n(x)$, где $\{u_n(x)\}$ — полная система функций в $W_{2,0}^1(\xi, \Gamma_T)$, для которого верна оценка $\|u^N\|_{W_{2,0}^1(\Gamma_T)} \leq c$. Далее показывается, что из ограниченной в $W_{2,0}^1(\Gamma_T)$ последовательности $\{u^N\}_{n \geq 1}$ можно выбрать подпоследовательность, слабо сходящуюся в $W_{2,0}^1(\Gamma_T)$ и равномерно сходящуюся по $t \subseteq [0, T]$ в норме $L_2(\Gamma_T)$ к некоторому элементу $u^* \in W_{2,0}^1(\xi, \Gamma_T)$. Функция $u^*(x, t)$ является обобщенным решением задачи (8).

Аналогично показывается однозначная разрешимость задачи (9).

4. Задача управления в классе $W_{2,0}^1(\Gamma_T)$. Предлагается процедура решения задачи управления в классе гладких функций. Переход к пределу в норме пространства $W_{2,0}^1(0, \pi)$ дает решение задачи управления в классе обобщенных решений.

4.1. Постановка задачи управления. Пусть $\varphi(x), \tilde{\varphi}(x) \in W_{2,0}^1(\xi, \Gamma)$, $\psi(x), \tilde{\psi}(x) \in L_2(\Gamma)$.

Задача 1 управления колебаниями волновой системой (1), (2) состоит в определении времени T и управляющих функций $\mu_k(t)$, $k = \overline{1, m-1}$, $\nu(t) \in W_{2,0}^1(0, T)$ из граничных условий (5) таких, чтобы в момент времени $t = 0$ выполнялись начальные условия (3), а в момент времени $t = T$ выполнялись финальные условия (4).

Поставленная задача состоит из двух вспомогательных задач:

1) задачи перевода системы (1), (2) за время T из начального состояния (3) в состояние динамического покоя

$$U(x, T) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} U(x, T) = 0$$

(задача гашения колебаний системы), второе равенство имеет место почти всюду на Γ ; 2) задачи перевода системы (1), (2) за время T из состояния динамического покоя в финальное состояние (4).

4.2. Решение задачи управления. Определим задачу управления колебаниями дифференциальной системы (1), (2) в классе гладких функций. Пусть $\varphi(x), \tilde{\varphi}(x) \in C^2[\Gamma]$, $\psi(x), \tilde{\psi}(x) \in C^1[\Gamma]$.

Задача 2 управления колебаниями дифференциальной системы (1), (2) состоит в определении времени T и управляющих функций $\mu_k(t)$, $k = \overline{1, m-1}$, $\nu(t) \in C^2[0, T]$ из граничных условий (5) таких, чтобы в момент времени $t = 0$ выполнялись начальные условия (3), а в момент времени $t = T$ выполнялись финальные условия (4).

Задача 2 представляется суммой решений вспомогательных задач: задачи гашения колебаний системы [1] и задачи перевода системы из состояния динамического покоя в заданное состояние [2]. В основе решения лежит спектральный подход и анализ задачи Штурма — Лиувилля на графе Γ , представление решения имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \mu_1(t) &= \frac{1}{2} (\varphi_{\gamma_1 \gamma_m}(t) + \tilde{\varphi}_{\gamma_1 \gamma_m}(\pi - t)) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\int_0^t \psi_{\gamma_1 \gamma_m}(\tau) d\tau - \int_0^{\pi-t} \tilde{\psi}_{\gamma_1 \gamma_m}(\tau) d\tau \right) + \frac{1}{2} (\varphi(0)_{\gamma_1} + \tilde{\varphi}(0)_{\gamma_1}), \\ \nu(t) &= \frac{1}{2} (\varphi_{\gamma_1 \gamma_m}(\pi - t) + \tilde{\varphi}_{\gamma_1 \gamma_m}(t)) - \\ &- \frac{1}{2} \left(\int_0^{\pi-t} \psi_{\gamma_1 \gamma_m}(\tau) d\tau - \int_0^t \tilde{\psi}_{\gamma_1 \gamma_m}(\tau) d\tau \right) - \frac{1}{2} (\varphi(0)_{\gamma_1} + \tilde{\varphi}(0)_{\gamma_1}), \\ t &\in [0, \pi]; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\mu_k(t) \equiv_{(k=2, m-1)} \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\varphi_{\gamma_k}(\pi - t) + \tilde{\varphi}_{\gamma_k}(\pi - t) - \right. \\ \left. - \int_{\pi/2}^{\pi-t} (\psi_{\gamma_k}(\tau) + \tilde{\psi}_{\gamma_k}(\tau)) d\tau \right), & t \in [0, \pi/2], \\ \frac{1}{2} \left(\varphi_{\gamma_k}(t) + \tilde{\varphi}_{\gamma_k}(t) + \right. \\ \left. + \int_{\pi/2}^t (\psi_{\gamma_k}(\tau) + \tilde{\psi}_{\gamma_k}(\tau)) d\tau \right), & t \in [\pi/2, \pi]. \end{cases} \quad (11)$$

при условии $\mu_1(t) - 2\mu_i(t) + \nu(t) \equiv 0$, $t \in [0, \pi]$, $i = \overline{2, m-1}$.

Рассмотрим последовательности начальных условий $\{\varphi_n(x)\}_{n \geq 1}$, $\{\psi_n(x)\}_{n \geq 1}$ и финальных условий $\{\tilde{\varphi}_n(x)\}_{n \geq 1}$, $\{\tilde{\psi}_n(x)\}_{n \geq 1}$: $\varphi_n(x)$, $\tilde{\varphi}_n(x) \in C^1[\Gamma]$, $\psi_n(x)$, $\tilde{\psi}_n(x) \in C(\Gamma)$. Пусть $\varphi_n \rightarrow \varphi$, $\tilde{\varphi}_n \rightarrow \tilde{\varphi}$ в норме пространства $W_{2,0}^1(\Gamma)$: $\varphi, \tilde{\varphi} \in W_{2,0}^1(\xi, \Gamma)$; $\psi_n \rightarrow \psi$, $\tilde{\psi}_n \rightarrow \tilde{\psi}$ в норме пространства $L_2(\Gamma)$: $\psi, \tilde{\psi} \in L_2(\Gamma)$.

Пусть для каждого фиксированного n решена задача 2. Обозначим ее решение через $\mu_{n,k}^*(t)$, $k = \overline{1, m-1}$, $\nu_n^*(t)$. Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ в норме пространства $W_{2,0}^1(0, \pi)$, получаем, что последовательности решений сходятся к функциям $\mu_k^*(t)$, $k = \overline{1, m-1}$, $\nu^*(t)$, являющимися элементами пространства $W_{2,0}^1(0, \pi)$ и имеющими вид (10), (11). При этом почти всюду на $(0, \pi)$ выполнены условия

$$\mu_1^*(t) - 2\mu_i^*(t) + \nu^*(t) = 0, \quad i = \overline{2, m-1}. \quad (12)$$

Таким образом, функции $\mu_k^*(t)$, $k = \overline{1, m-1}$, $\nu^*(t)$ являются решением задачи 2.

5. Заключение. Ассоциированная с графом-звездой Γ динамическая система (1)–(5) является управляемой для времени $T = \pi$ при условиях (12) на управляющие воздействия.

Литература

1. Провоторов В. В. Построение граничных управлений в задаче о гашении колебаний системы струн // Вестник СПбГУ. Сер. 10, 2012. Вып. 1. С. 62–71.
2. Гнилицкая Ю. А. Граничное управление колебаниями системы струн // Процессы управления и устойчивость: Труды 43-й международной научной конференции аспирантов и студентов / Под ред. А. С. Ерёмкина, Н. В. Смирнова. СПб.: Издат. Дом С.-Петербурб. гос. ун-та, 2012. С. 21–25.

Колпакова Е. А.

Санкт-Петербургский государственный университет

Разделение двух множеств двумя гиперплоскостями¹

Рекомендовано к публикации профессором Демьяновым В. Ф.

1. Постановка задачи. В настоящей работе рассматривается частный случай задачи идентификации — задача разделения двух множеств двумя гиперплоскостями. Заданы два множества

$$A = \{a_i \in \mathbb{R}^n | i \in I = \overline{1, n_1}\}, \quad B = \{b_j \in \mathbb{R}^n | j \in J = \overline{1, n_2}\}.$$

Предполагается, что $A \cap B = \emptyset$. Требуется найти правило идентификации этих множеств. Такое правило строится на основе минимизации некоторого суррогатного функционала.

2. Решение задачи. Имеем две гиперплоскости

$$L_1 = \{x \in \mathbb{R}^n | h_1(x, l_1, d_1) = (x, l_1) + d_1 = 0\},$$

$$L_2 = \{x \in \mathbb{R}^n | h_2(x, l_2, d_2) = (x, l_2) + d_2 = 0\},$$

где $l_1, l_2 \in \mathbb{R}^n, d_1, d_2 \in \mathbb{R}, \|l_1\| = \|l_2\| = 1$. Если $\|l_1\| = \|l_2\| = 1$, то h_1 и h_2 — расстояния от точки $x \in \mathbb{R}^n$ до соответствующих гиперплоскостей. Гиперплоскости пересекаются и делят каждое множество A и B на две части. Положим $z = (l_1, l_2, d_1, d_2) \in \mathbb{R}^{2n+2}$. Обозначим $C = A \cup B$. Идентификацию точки $c \in C$ будем проводить по следующему правилу:

- если $\{h(c, z) = h_1 \times h_2 > 0\}$, то считаем, что $c \in A$,
- если $\{h(c, z) = h_1 \times h_2 \leq 0\}$, то считаем, что $c \in B$.

Требуется найти такое правило идентификации (идентификатор — это две гиперплоскости), чтобы оно «разделяло» множества A и B наилучшим образом. Для выбора оптимальных гиперплоскостей вводятся натуральные функционалы (например, количество неверно идентифицированных точек). Так как такие функционалы разрывны, необходимо ввести суррогатный функционал и минимизировать его. Введем суррогатный функционал следующим образом:

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 12-01-00752

1) он должен быть неотрицателен и обращаться в ноль, когда все точки идентифицированы правильно; 2) он должен быть непрерывен и обладать достаточно хорошими (с точки зрения поиска минимума) аналитическими свойствами. Возьмем суррогатный функционал, который равен сумме произведений расстояний неверно определенных точек до соответствующих гиперплоскостей:

$$F(z) = \sum_{i \in I} \max\{0, -h(a_i, z)\} + \sum_{j \in J} \max\{0, h(b_j, z)\},$$

где $z = (l_1, l_2, d_1, d_2)$, $z \in \mathbb{R}^{2n+2}$, $h(x, l_1, l_2, d_1, d_2) = h(x, z)$.

Необходимо найти $\min_{z \in Z} F(z)$, где $Z = \{z = (l_1, l_2, d_1, d_2), \|l_1\| = \|l_2\| = 1, l_1, l_2 \in R^n; d_1, d_2 \in R\} \subset \mathbb{R}^{2n+2}$.

Функция $h(a_i, z) = h_1(a_i, z) \times h_2(a_i, z) = ((a_i, l_1) + d_1) \times ((a_i, l_2) + d_2)$ — гладкая. Найдем квазидифференциал этой функции [1]:
 $\underline{\partial}h(a_i) = \{h'_z(a_i) = h_1 \times h'_2 + h_2 \times h'_1\} = \{h_1(a_i) \times (0_n, a_i, 0, 1) + h_2(a_i) \times (a_i, 0_n, 1, 0)\} = \{(h_2(a_i)a_i, h_1(a_i)a_i, h_2(a_i), h_1(a_i))\}$, $\bar{\partial}h(a_i) = \{0_{2n+2}\}$.
 Положим $\varphi_i(z) = \max\{0, -h(a_i, z)\}$, $\psi_j(z) = \max\{0, h(b_j, z)\}$,

$$\varphi(z) = \sum_{i \in I} \max\{0, -h(a_i, z)\}, \quad \psi(z) = \sum_{j \in J} \max\{0, h(b_j, z)\}.$$

Найдем субдифференциал и супердифференциал функции φ_i [1]. Считаем, что на гиперплоскостях нет точек A и B , т. е. $h(a_i, z) \neq 0$.
 $\underline{\partial}\varphi_i = \begin{cases} \{0_{2n+2}\}, & \text{если } h(a_i, z) > 0, \\ \{(-h_2(a_i)a_i, -h_1(a_i)a_i, -h_2(a_i), -h_1(a_i))\}, & \text{если } h(a_i, z) < 0. \end{cases}$
 $\bar{\partial}\varphi_i = \{0_{2n+2}\}$. Тогда

$$\underline{\partial}\varphi = \left\{ \left(- \sum_{i \in I_1} h_2(a_i)a_i, - \sum_{i \in I_1} h_1(a_i)a_i, - \sum_{i \in I_1} h_2(a_i), - \sum_{i \in I_1} h_1(a_i) \right) \right\},$$

где $I_1 = \{i \in I | h(a_i, z) < 0\}$; $\bar{\partial}\varphi = \{0_{2n+2}\}$.

Функция $h(b_j, z) = h_1(b_j, z) \times h_2(b_j, z) = ((b_j, l_1) + d_1) \times ((b_j, l_2) + d_2)$ — гладкая. Найдем квазидифференциал этой функции [1]:
 $\underline{\partial}h(b_j) = \{h'_z(b_j)\} = \{h_1 \times h'_2 + h_2 \times h'_1\} = \{h_1(b_j) \times (0_n, b_j, 0, 1) + h_2(b_j) \times (b_j, 0_n, 1, 0)\} = \{(h_2(b_j)b_j, h_1(b_j)b_j, h_2(b_j), h_1(b_j))\}$, $\bar{\partial}h(b_j) = \{0_{2n+2}\}$.
 Найдем субдифференциал и супердифференциал функции ψ_i [1]. Считаем, что на гиперплоскостях нет точек A и B , т. е. $h(b_j, z) \neq 0$.

$$\underline{\partial}\psi_j = \begin{cases} \{0_{2n+2}\}, & \text{если } h(b_j, z) < 0, \\ \{(h_2(b_j)b_j, h_1(b_j)b_j, h_2(b_j), h_1(b_j))\}, & \text{если } h(b_j, z) > 0. \end{cases}$$

$\bar{\partial}\psi_j = \{0_{2n+2}\}$. Тогда

$$\underline{\partial}\psi = \left\{ \left(\sum_{j \in J_1} h_2(b_j)b_j, \sum_{j \in J_1} h_1(b_j)b_j, \sum_{j \in J_1} h_2(b_j), \sum_{j \in J_1} h_1(b_j) \right) \right\},$$

где $J_1 = \{j \in J | h(b_j, z) > 0\}$, $\bar{\partial}\psi = \{0_{2n+2}\}$.

Так как $F(z)$ субдифференцируемая функция, то её субдифференциал [1] имеет вид

$$\begin{aligned} \underline{\partial}F(z) &= \{F'(z)\} = \underline{\partial}\varphi + \underline{\partial}\psi = \\ &= \left\{ \left(- \sum_{i \in I_1} h_2(a_i)a_i, - \sum_{i \in I_1} h_1(a_i)a_i, - \sum_{i \in I_1} h_2(a_i), - \sum_{i \in I_1} h_1(a_i) \right) \right\} + \\ &\quad + \left\{ \left(\sum_{j \in J_1} h_2(b_j)b_j, \sum_{j \in J_1} h_1(b_j)b_j, \sum_{j \in J_1} h_2(b_j), \sum_{j \in J_1} h_1(b_j) \right) \right\} = \\ &= \left\{ \left(- \sum_{i \in I_1} h_2(a_i)a_i + \sum_{j \in J_1} h_2(b_j)b_j, - \sum_{i \in I_1} h_1(a_i)a_i + \sum_{j \in J_1} h_1(b_j)b_j, \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum_{i \in I_1} h_2(a_i) + \sum_{j \in J_1} h_2(b_j), - \sum_{i \in I_1} h_1(a_i) + \sum_{j \in J_1} h_1(b_j) \right) \right\}, \\ \bar{\partial}F(z) &= \{0_{2n+2}\}. \end{aligned}$$

Имеем ограничения $\|l_1\| = \|l_2\| = 1$. Снимем их с помощью штрафной функции. Тогда перейдем от задачи условной минимизации функции F на множестве Z к задаче безусловной минимизации функции $\Phi_\lambda(z) = F(z) + \lambda\varphi_0(z)$. Функция Φ_λ называется штрафной функцией, где $\lambda > 0$, функция φ_0 удовлетворяет условию $\varphi_0(z) = \begin{cases} 0, & \text{если } z \in Z, \\ > 0, & \text{если } z \notin Z. \end{cases}$ В качестве φ_0 возьмем функцию

$$\varphi_0(z) = \varphi_1(z) + \varphi_2(z), \text{ где } \varphi_1(z) = |||l_1|| - 1|, \varphi_2(z) = |||l_2|| - 1|.$$

Можно показать, что функция $\varphi_0(z)$ удовлетворяет теореме о существовании точной штрафной функции [2]. Тогда при достаточно больших $\lambda > 0$ задача минимизации функции F на множестве Z эквивалентна задаче минимизации функции Φ_λ на \mathbb{R}^n .

Необходимое условие минимума функции Φ_λ имеет вид

$$0_{2n+2} \in \underline{\partial}\Phi_\lambda. \quad (1)$$

Найдем субдифференциал функции $\varphi_0(z) = \varphi_1(z) + \varphi_2(z)$. Для этого сначала найдем субдифференциалы функций φ_1 и φ_2 .

Имеем $\underline{\partial}\varphi_1 = \{(\text{co}\{\frac{l_1}{\|l_1\|}, \frac{-l_1}{\|l_1\|}\}, 0_n, 0, 0)\} = \{(\text{co}\{l_1, -l_1\}, 0_n, 0, 0)\}$, так как $\underline{\partial}\varphi_1$ вычисляем в точке, где $\|l_1\| = \|l_2\| = 1$; $\bar{\partial}\varphi_1 = \{0_{2n+2}\}$; $\underline{\partial}\varphi_2 = \{(0_n, \text{co}\{\frac{l_2}{\|l_2\|}, \frac{-l_2}{\|l_2\|}\}, 0, 0)\} = \{(0_n, \text{co}\{l_2, -l_2\}, 0, 0)\}$, так как $\underline{\partial}\varphi_2$ вычисляем в точке, где $\|l_1\| = \|l_2\| = 1$; $\bar{\partial}\varphi_2 = \{0_{2n+2}\}$. Тогда

$$\begin{aligned} \underline{\partial}\varphi_0 &= \underline{\partial}\varphi_1 + \underline{\partial}\varphi_2 = \{(\text{co}\{l_1, -l_1\}, \text{co}\{l_2, -l_2\}, 0, 0)\}, \\ \bar{\partial}\varphi_0 &= \{0_{2n+2}\}. \end{aligned}$$

Найдем субдифференциал

$$\begin{aligned} \underline{\partial}\Phi_\lambda &= \underline{\partial}F(z) + \lambda \underline{\partial}\varphi_0 = \\ &= \left\{ \left(- \sum_{i \in I_1} h_2(a_i) a_i + \sum_{j \in J_1} h_2(b_j) b_j + \lambda \text{co}\{l_1, -l_1\}, \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum_{i \in I_1} h_1(a_i) a_i + \sum_{j \in J_1} h_1(b_j) b_j + \lambda \text{co}\{l_2, -l_2\}, \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum_{i \in I_1} h_2(a_i) + \sum_{j \in J_1} h_2(b_j), - \sum_{i \in I_1} h_1(a_i) + \sum_{j \in J_1} h_1(b_j) \right) \right\}, \quad \bar{\partial}\Phi_\lambda = \{0_{2n+2}\}. \end{aligned}$$

3. Геометрическая интерпретация необходимого условия минимума. Условие (1) является необходимым условием. Имеем

$$- \sum_{i \in I_1} h_2(a_i) a_i + \sum_{j \in J_1} h_2(b_j) b_j = \mu_1 l_1, \quad \mu_1 \in [-\lambda, \lambda] \quad (2)$$

$$- \sum_{i \in I_1} h_1(a_i) a_i + \sum_{j \in J_1} h_1(b_j) b_j = \mu_2 l_2, \quad \mu_2 \in [-\lambda, \lambda] \quad (3)$$

$$- \sum_{i \in I_1} h_2(a_i) + \sum_{j \in J_1} h_2(b_j) = 0, \quad (4)$$

$$- \sum_{i \in I_1} h_1(a_i) + \sum_{j \in J_1} h_1(b_j) = 0. \quad (5)$$

Так как $h(a_i, z) < 0$, возможны следующие варианты:

$$1) \{h_1(a_i) < 0, h_2(a_i) > 0\}, \quad 2) \{h_1(a_i) > 0, h_2(a_i) < 0\}.$$

Так как $h(b_j, z) > 0$, возможны следующие варианты:

$$1) \{h_1(b_j) > 0, h_2(b_j) > 0\}, \quad 2) \{h_1(b_j) < 0, h_2(b_j) < 0\}.$$

Из (4) следует

$$- \sum_{h_1(a_i) < 0} h_2(a_i) - \sum_{h_1(a_i) > 0} h_2(a_i) + \sum_{h_1(b_j) > 0} h_2(b_j) + \sum_{h_1(b_j) < 0} h_2(b_j) = 0.$$

Сгруппируем первое с четвертым слагаемые и второе с третьим.

$$\sum_{h_1(a_i) < 0} h_2(a_i) - \sum_{h_1(b_j) < 0} h_2(b_j) = - \sum_{h_1(a_i) > 0} h_2(a_i) + \sum_{h_1(b_j) > 0} h_2(b_j).$$

Получаем, что сумма расстояний неверно определенных точек из A и из B до гиперплоскости $h_2 = 0$, оказавшихся в полупространстве $h_1 > 0$, равна сумме расстояний неверно определенных точек из A и из B до гиперплоскости $h_2 = 0$, оказавшихся в полупространстве $h_1 < 0$. Из (5) следует

$$- \sum_{h_2(a_i) < 0} h_1(a_i) - \sum_{h_2(a_i) > 0} h_1(a_i) + \sum_{h_2(b_j) > 0} h_1(b_j) + \sum_{h_2(b_j) < 0} h_1(b_j) = 0.$$

Сгруппируем первое с четвертым слагаемые и второе с третьим.

$$\sum_{h_2(a_i) < 0} h_1(a_i) - \sum_{h_2(b_j) < 0} h_1(b_j) = - \sum_{h_2(a_i) > 0} h_1(a_i) + \sum_{h_2(b_j) > 0} h_1(b_j).$$

Получаем, что сумма расстояний неверно определенных точек из A и из B до гиперплоскости $h_1 = 0$, оказавшихся в полупространстве $h_2 > 0$, равна сумме расстояний неверно определенных точек из A и из B до гиперплоскости $h_1 = 0$, оказавшихся в полупространстве $h_2 < 0$. Из (2) следует

$$\begin{aligned} - \sum_{h_1(a_i) < 0} h_2(a_i)a_i - \sum_{h_1(a_i) > 0} h_2(a_i)a_i + \sum_{h_1(b_j) > 0} h_2(b_j)b_j + \\ + \sum_{h_1(b_j) < 0} h_2(b_j)b_j = \mu_1 l_1. \end{aligned}$$

Сгруппируем первое с четвертым слагаемые и второе с третьим.

$$- \sum_{h_1(a_i) > 0} h_2(a_i)a_i + \sum_{h_1(b_j) > 0} h_2(b_j)b_j -$$

$$-\left(\sum_{h_1(a_i)<0} h_2(a_i)a_i - \sum_{h_1(b_j)<0} h_2(b_j)b_j\right) = \mu_1 l_1.$$

Получаем, что разность суммы неверно определенных точек из A и B , оказавшихся в полупространстве $h_1 > 0$, с весами, равными расстоянию до плоскости $h_2 = 0$, и суммы неверно определенных точек из A и B , оказавшихся в полупространстве $h_1 < 0$, с весами, равными расстоянию до плоскости $h_2 = 0$, параллельна нормали l_1 плоскости $h_1 = 0$. Из (3) следует

$$\begin{aligned} & - \sum_{h_2(a_i)<0} h_1(a_i)a_i - \sum_{h_2(a_i)>0} h_1(a_i)a_i + \sum_{h_2(b_j)>0} h_1(b_j)b_j + \\ & + \sum_{h_2(b_j)<0} h_1(b_j)b_j = \mu_2 l_2. \end{aligned}$$

Сгруппируем первое с четвертым слагаемые и второе с третьим.

$$\begin{aligned} & - \sum_{h_2(a_i)>0} h_1(a_i)a_i + \sum_{h_2(b_j)>0} h_1(b_j)b_j - \\ & - \left(\sum_{h_2(a_i)<0} h_1(a_i)a_i - \sum_{h_2(b_j)<0} h_1(b_j)b_j\right) = \mu_2 l_2. \end{aligned}$$

Получаем, что разность суммы неверно определенных точек из A и B , оказавшихся в полупространстве $h_2 > 0$, с весами, равными расстоянию до плоскости $h_1 = 0$, и суммы неверно определенных точек из A и B , оказавшихся в полупространстве $h_2 < 0$, с весами, равными расстоянию до плоскости $h_1 = 0$, параллельна нормали l_2 плоскости $h_2 = 0$.

Таким образом, в данной статье была рассмотрена задача разделения двух множеств двумя гиперплоскостями и приведена геометрическая интерпретация решения поставленной задачи.

Литература

1. Демьянов В. Ф., Васильев Л. В. Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981. 376 с.
2. Демьянов В. Ф. Условия экстремума и вариационное исчисление. М.: Высшая школа, 2005. 335 с.

Лебедев Д. М.

Санкт-Петербургский государственный университет

Оптимизационная задача проектирования точки на квадрату¹

Рекомендовано к публикации профессором Поляковой Л. Н.

Рассмотрим оптимизационную задачу. Требуется найти

$$\inf_{x \in X} \|x\|, \quad (1)$$

где

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi_1(x) = 0\},$$

$$\varphi_1(x) = \langle Ax, x \rangle + 2\langle b_1, x \rangle + c, \quad x, b_1 \in \mathbb{R}^n, \quad c \in \mathbb{R},$$

A — $(n \times n)$ -матрица и $\|*\|$ — евклидова норма. Нетрудно видеть, что оптимальное значение в (1) может быть получено из решения следующей задачи:

$$\min_{x \in X} \langle x, x \rangle. \quad (2)$$

Как известно [1], задача (2) является классической задачей оптимизации. Так как матрица A симметричная, то все ее собственные числа λ_i , $i = 1, \dots, n$, вещественные. Поэтому существует такая ортогональная матрица Q [2], что линейное преобразование $y = Q^T x$ приводит функцию $\varphi_1(x)$, определяющую множество X , к виду

$$\varphi(y) = \langle \Lambda y, y \rangle + 2\langle Q^T b_1, y \rangle + c.$$

где $\Lambda = \text{diag} \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ — диагональная $(n \times n)$ -матрица. Обозначим,

$$Y = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(y) = 0\},$$

$$\varphi(y) = \langle \Lambda y, y \rangle + 2\langle b, y \rangle + c = 0, \quad y, b \in \mathbb{R}^n, \quad b = Q^T b_1, \quad c \in \mathbb{R},$$

Наряду с (2) рассмотрим задачу

$$\min_{y \in Y} \langle y, y \rangle. \quad (3)$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 12-01-00752

Если решение y^* задачи (3) найдено, то точка $x^* = Qy^*$ будет решением задачи (2).

Рассмотрим три случая.

1. Пусть $c = 0$. Тогда $x^* = 0_n$ является решением (1).

2. Пусть $c > 0$. Тогда для нахождения точки минимума (3) решим следующую оптимизационную задачу: найти

$$\min_{y \in Y_1} \langle y, y \rangle, \quad (4)$$

где

$$Y_1 = \left\{ y \in \mathbb{R}^n \mid \langle \Lambda y, y \rangle + 2\langle b, y \rangle + c \leq 0 \right\}, \quad y, b \in \mathbb{R}^n, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Если точка $y^* \in Y_1$ — решение задачи (4), то необходимо существование такого числа $\mu^* > 0$, для которого выполняется равенство

$$\Lambda y^* + \mu^* y^* = -b. \quad (5)$$

3. Пусть $c < 0$. Тогда для нахождения точки минимума (3) решим следующую оптимизационную задачу: найти

$$\min_{y \in Y_2} \langle y, y \rangle, \quad (6)$$

где

$$Y_2 = \left\{ y \in \mathbb{R}^n \mid -\langle \Lambda y, y \rangle - 2\langle b, y \rangle - c \leq 0 \right\}, \quad y, b \in \mathbb{R}^n, \quad c \in \mathbb{R}.$$

В этом случае, если точка $y^* \in Y_2$ — решение задачи (6), то необходимо существование такого числа $\mu^* > 0$, для которого выполняется равенство

$$\Lambda y^* - \mu^* y^* = -b.$$

В обоих случаях число μ^* является множителем Лагранжа для задач (4) и (6). Кроме того, в точке минимума $y^* \in Y_i$, $i = 1, 2$, должно выполняться равенство

$$\langle \Lambda y^*, y^* \rangle + 2\langle b, y^* \rangle + c = 0. \quad (7)$$

Рассмотрим случай, когда $b \neq 0_n$, $c > 0$. Преобразуем условие (5). Имеем

$$(\Lambda + \mu^* E)y^* = -\frac{b}{2},$$

где E — единичная матрица. Определим

$$y = -\frac{1}{2}(\Lambda + \mu E)^{-1}b = \left(-\frac{b_1}{2(\lambda_1 + \mu)}, \dots, -\frac{b_n}{2(\lambda_n + \mu)} \right) \in \mathbb{R}^n.$$

Подставляя y в (7), имеем

$$0 = \langle \Lambda y, y \rangle + \langle b, y \rangle + c = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i b_i^2}{4(\lambda_i + \mu)^2} - \sum_{i=1}^n \frac{b_i^2}{2(\lambda_i + \mu)} + c.$$

Для того чтобы решить это уравнение, необходимо найти корни многочлена $P(\mu)$ степени $2n$

$$P(\mu) = \sum_{i=1}^n \left[(2\mu + \lambda_i) b_i^2 \prod_{k=1, k \neq i}^n (\lambda_k + \mu)^2 \right] - 4c \prod_{k=1}^n (\lambda_k + \mu)^2. \quad (8)$$

Таким образом, задача нахождения точки, ближайшей к множеству Y_1 , свелась к задаче определения положительных корней многочлена вида (8) степени $2n$. Из основной теоремы алгебры следует, что многочлен степени $2n$ имеет ровно $2n$ корней.

Замечание. Аналогичный подход используется в статье [3] для решения минимаксной задачи определенного вида.

Пример. Перейдем к рассмотрению задачи (2) при $c < 0$. Пусть задано множество (см. рис. 1)

$$X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \psi(x) = 0\}, \quad \psi(x) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 + 2x_1 + x_2 - 1.$$

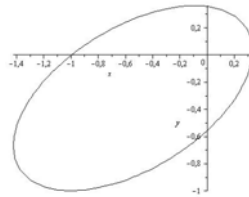


Рис. 1. Множество X

Рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$. Матрица A положительно определена, $\lambda_1 = 1,764$, $\lambda_2 = 6,236$ — ее собственные числа. Найдём жорданову форму матрицы A . Имеем

$$A = Q\Lambda Q^T, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1,764 & 0 \\ 0 & 6,236 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0,851 & -0,525 \\ 0,525 & 0,851 \end{pmatrix}.$$

Матрица Q ортогональна. Введем переменную $y = Q^T x$. Рассмотрим функцию

$$\psi_1(y) = \langle \Lambda y, y \rangle + \langle Q^T b, y \rangle - 1, \quad b = (2, 1) \in \mathbb{R}^2, \quad y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2,$$

и множество

$$Y_2 = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -\psi_1(y) \leq 0\}.$$

Множество Y_2 находится вне эллипсоида на рис. 2. Очевидно, что оно неограничено.

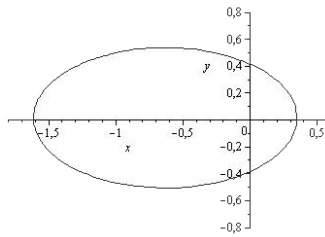


Рис. 2. Множество Y_1

Так как в этом примере $c = -1$, то вычислим многочлен $Q(\mu)$. Имеем

$$Q(\mu) = \mu^4 - 18,5\mu^3 + 119,25\mu^2 - 300,5\mu + 206,25.$$

Многочлен $Q(\mu)$ имеет четыре вещественных положительных корня

$$\mu_1 = 1,074, \quad \mu_2 = 5, \quad \mu_3 = 5,768, \quad \mu_4 = 6,657.$$

Найдем соответствующие этим корням стационарные точки y_1^*, \dots, y_4^* , принадлежащие множеству Y_2 :

$$y_1^* = (-1, 614; 0, 019), \quad y_2^* = (0, 344; 0, 081),$$

$$y_3^* = (0, 278; 0, 214), \quad y_4^* = (0, 227; -0, 238),$$

$$\|y_1\| = 1, 614, \quad \|y_2\| = 0, 353, \quad \|y_3\| = 0, 351, \quad \|y_4\| = 0, 329.$$

Все указанные точки являются точками локальных минимумов функции $\langle y, y \rangle$ на множестве Y_2 . Очевидно, что точка y_4^* является точкой минимума, y_1^* — точкой максимума задачи (6) (см. рис. 2). Найдем точки $x_1^*, \dots, x_4^* \in X$:

$$x_1^* = (-1, 383; -0, 832), \quad x_2^* = (0, 25; 0, 25),$$

$$x_3^* = (0, 123; 0, 328), \quad x_4^* = (0, 318; -0, 083).$$

Точка x_4^* является точкой минимума, точка x_1^* — точка максимума задачи (1) (см. рис. 1).

Если рассматриваемое множество является эллипсоидом, определенным с помощью квадратичной функции с отрицательным свободным членом, то метод позволяет определить не только точки ближайшие к нулю, но и точки максимально удаленные от начала координат.

Литература

1. Васильев Ф. П. Методы оптимизации. М.: Факториал пресс, 2002. 824 с.
2. Фаддеев Д. К. Лекции по алгебре. М.: Наука, 1984. 416 с.
3. Полякова Л. Н. Некоторые методы минимизации максимума квадратичных функций // Владикавказский математический журнал, 2006. Том 8. Вып 4. С. 47–57.

Меденников И. П.

Санкт-Петербургский государственный университет

**Метод функционалов Ляпунова — Красовского
для дифференциально-разностных систем с
линейно возрастающим запаздыванием**

Рекомендовано к публикации профессором Жабко А. П.

1. Введение. Рассмотрим систему дифференциально-разностных уравнений с линейно возрастающим запаздыванием

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(\alpha t). \quad (1)$$

Здесь $0 < t_0 \leq t$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, A и B — постоянные $(n \times n)$ -матрицы, $0 < \alpha < 1$. Пример такого уравнения встречается в теории радиоактивного распада и приведен в книге [1]

$$\frac{du(t)}{dt} = -\lambda u(t) + \lambda b u(bt).$$

Каждое решение системы (1) определяется начальными условиями: начальным моментом времени $t_0 > 0$ и начальной вектор-функцией $\varphi(\theta)$, $\theta \in [\alpha t_0, t_0]$, $x(\theta) = \varphi(\theta)$. Будем полагать в дальнейшем, что начальные функции являются кусочно-непрерывными на промежутке $[\alpha t_0, t_0]$. Решение системы (1) с начальными данными t_0 , φ будем обозначать через $x(t, t_0, \varphi)$, а сегмент траектории $x(s, t_0, \varphi)$ на промежутке $s \in [\alpha t, t]$ при $t \geq t_0$ — через $x_t(t_0, \varphi)$, или просто x_t , если начальный момент времени и начальная функция очевидны из контекста. Функцию, тождественно равную на промежутке $s \in [\alpha t, t]$ нулевому вектору, будем обозначать через 0_t .

В качестве векторной нормы будем использовать евклидову норму, а для векторных функций — равномерную норму

$$\|\varphi(\cdot)\| = \sup_{\theta \in [\alpha t_0, t_0]} \|\varphi(\theta)\|.$$

Введём обозначения

$$\bar{\lambda} = \max\{\operatorname{Re}\lambda : \det(\lambda E - A) = 0\},$$

$$\bar{\mu} = \max\{-\infty, \operatorname{Re} \mu : \det(A + \alpha^\mu B) = 0\}.$$

Как показано в работах [2, 3], если $\bar{\lambda} < 0$ и $\bar{\mu} < 0$, то система (1) асимптотически устойчива, и для любого $\varepsilon > 0$ справедлива оценка на решение

$$\|x(t, t_0, \varphi)\| \leq D(\varepsilon) \|\varphi(\cdot)\| \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\bar{\mu} + \varepsilon}, \quad t \geq t_0. \quad (2)$$

Если же $\bar{\lambda} > 0$ или $\bar{\mu} > 0$, то система (1) имеет неограниченное решение, а потому неустойчива.

Но вышеизложенный метод не позволяет проводить анализ устойчивости по отношению к зависящим от времени возмущениям в коэффициентах и в запаздывании. Для решения этой задачи может быть применен метод функционалов Ляпунова — Красовского. Целью наших исследований является получение необходимого и достаточного условий асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1) в рамках метода функционалов.

2. Вспомогательные утверждения. Легко показать, что если матрица A невырожденная, то $\alpha^{-\bar{\mu}}$ есть максимальное по модулю собственное число матрицы $-A^{-1}B$. В этом случае условие $\bar{\mu} < 0$ равносильно тому, что все собственные числа матрицы $A^{-1}B$ лежат внутри единичного круга.

Лемма 1. Для $t \geq t_0$ справедлива оценка

$$\|x(t, t_0, \varphi)\| \leq \|\varphi(\cdot)\| e^{(\|A\| + \|B\|)(t - t_0)}. \quad (3)$$

3. Метод функционалов. Пусть $\bar{\lambda} < 0$ и $\bar{\mu} < 0$. Выберем величину $\gamma > 0$ таким образом, чтобы выполнялось условие $\bar{\mu}\gamma < -1$. Это условие равносильно тому, что $\alpha^{-\bar{\mu}} < \alpha^{1/\gamma}$, т. е. собственные числа матрицы $A^{-1}B$ лежат внутри круга радиуса $\alpha^{1/\gamma}$.

Рассмотрим функционал

$$v_0(t_0, \varphi) = \int_{t_0}^{+\infty} \|x(s, t_0, \varphi)\|^\gamma ds, \quad (4)$$

который удовлетворяет условию

$$\frac{dv_0(t, x_t)}{dt} = -\|x(t, t_0, \varphi)\|^\gamma.$$

Интеграл в правой части (4) сходится благодаря оценке (2).

Введем в рассмотрение множества

$$S_M = \{\varphi \in \mathbb{PC}([\alpha t_0, t_0], \mathbb{R}^n) : \|\varphi(\cdot)\| \leq (1 + M)\|\varphi(t_0)\|\}, \quad M \geq 0.$$

Теорема 1. Для функционала (4) на множествах S_M справедлива оценка

$$v_0(t_0, \varphi) \geq \frac{\zeta}{2^\gamma(1 + M)} \|\varphi(t_0)\|^\gamma,$$

где постоянная ζ определяется из условия

$$\frac{1}{2\zeta} = (\|A\| + \|B\|) e^{(\|A\| + \|B\|)\zeta}.$$

Доказательство. Как известно,

$$x(t) - \varphi(t_0) = \int_{t_0}^t (Ax(s) + Bx(\alpha s)) ds, \quad t \geq t_0.$$

Используя неравенство (3) из леммы 1, получим при $t \in [t_0, t_0 + \zeta]$

$$\begin{aligned} \|x(t) - \varphi(t_0)\| &\leq \\ &\leq (t - t_0) \|\varphi(\cdot)\| (\|A\| + \|B\|) e^{(\|A\| + \|B\|)(t - t_0)} \leq (t - t_0) \|\varphi(\cdot)\| \frac{1}{2\zeta}. \end{aligned}$$

Тогда при $t \in [t_0, t_0 + \zeta \frac{\|\varphi(t_0)\|}{\|\varphi(\cdot)\|}]$ будем иметь

$$\|x(t) - \varphi(t_0)\| \leq \frac{1}{2} \|\varphi(t_0)\|.$$

Далее, при $t \in [t_0, t_0 + \zeta \frac{\|\varphi(t_0)\|}{\|\varphi(\cdot)\|}]$ справедливо

$$\|\varphi(t_0)\| \leq \|x(t) - \varphi(t_0)\| + \|x(t)\| \leq \frac{1}{2} \|\varphi(t_0)\| + \|x(t)\|,$$

т. е.

$$\|x(t)\| \geq \frac{1}{2} \|\varphi(t_0)\|.$$

Получим теперь требуемую оценку на функционал (4)

$$\begin{aligned} v_0(t_0, \varphi) &= \int_{t_0}^{+\infty} \|x(s, t_0, \varphi)\|^\gamma ds \geq \\ &\geq \int_{t_0}^{t_0 + \zeta \frac{\|\varphi(t_0)\|}{\|\varphi(\cdot)\|}} \|x(s, t_0, \varphi)\|^\gamma ds \geq \zeta \frac{\|\varphi(t_0)\|}{\|\varphi(\cdot)\|} \frac{1}{2^\gamma} \|\varphi(t_0)\|^\gamma, \end{aligned}$$

и при $\varphi \in S_M$

$$v_0(t_0, \varphi) \geq \frac{\zeta}{2^\gamma(1+M)} \|\varphi(t_0)\|^\gamma.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть задан неотрицательный и непрерывный в нуле функционал $v(t, \varphi)$ такой, что $v(t, 0_t) = 0$, и выполнены условия

1. $v(t_0, \varphi) \geq c_1 \|\varphi(t_0)\|^\gamma$ при $t_0 > 0$, $\varphi \in S_M$ при некоторых $M \geq 0$, $c_1 > 0$, $\gamma > 0$;
2. $\frac{dv(t, x_t)}{dt} \leq -c_2 \|x(t)\|^\nu$ для некоторых $c_2 > 0$, $\nu > 0$.

Тогда нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво (неравномерно).

Доказательство. Зафиксируем произвольные $\varepsilon > 0$, $t_0 > 0$. В силу непрерывности в нуле функционала v существует постоянная $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$ такая, что при $\|\varphi(\cdot)\| < \delta$ будет выполнено $v(t_0, \varphi) < c_1 \varepsilon^\gamma$. Покажем, что $\|x(t, t_0, \varphi)\| < \varepsilon$ при любых $t \geq t_0$.

Предположим противное. Пусть существует $t_1 > t_0$ такое, что $\|x(t_1, t_0, \varphi)\| = \varepsilon$, и $\|x(\tau, t_0, \varphi)\| < \varepsilon$ при $t_0 \leq \tau < t_1$. Тогда, как нетрудно видеть, $x_{t_1}(t_0, \varphi) \in S_M$. В силу второго условия теоремы

$$c_1 \varepsilon^\gamma \leq v(t_1, x_{t_1}) \leq v(t_0, \varphi) < c_1 \varepsilon^\gamma.$$

Полученное противоречие доказывает устойчивость по Ляпунову нулевого решения.

Выберем $\Delta(\varepsilon, t_0) = \delta(\varepsilon, t_0)$ и покажем, что при $\|\varphi(\cdot)\| < \Delta$ будет $\|x(t, t_0, \varphi)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Предположим противное. Пусть существует последовательность $\{t_k\}$, ($k = 1, 2, \dots$) такая, что $t_{k+1} - t_k > 1$

и $\|x(t_k)\| \geq \beta > 0$. Рассмотрим разность

$$x(t) - x(t_k) = \int_{t_k}^t (Ax(s) + Bx(\alpha s)) ds, \quad t \in [t_k, t_k + \tau].$$

Пусть $\tau = \min\{\frac{\beta}{2\varepsilon(\|A\| + \|B\|)}, 1\}$. Оценив эту разность по норме, будем иметь при $t \in [t_k, t_k + \tau]$

$$\|x(t) - x(t_k)\| \leq (\|A\| + \|B\|)\varepsilon\tau \leq \frac{\beta}{2}.$$

Тогда при $t \in [t_k, t_k + \tau]$

$$\beta \leq \|x(t_k)\| \leq \|x(t) - x(t_k)\| + \|x(t)\| \leq \frac{\beta}{2} + \|x(t)\|,$$

т. е.

$$\|x(t)\| \geq \frac{\beta}{2}.$$

Проинтегрировав второе условие теоремы на промежутке $[t_0, t]$, получим

$$v(t, x_t) \leq v(t_0, \varphi) - c_2 \int_{t_0}^t \|x(s)\|^\nu ds \leq v(t_0, \varphi) - \tau c_2 \frac{\beta^\nu}{2^\nu} N(t),$$

где $N(t)$ — число промежутков $[t_k, t_k + \tau]$, попавших в $[t_0, t]$. Очевидно, что $N(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$, следовательно выражение справа станет отрицательным, начиная с некоторого t . Это противоречит неотрицательности функционала v . Таким образом, предположение неверно, и нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво.

Теорема доказана.

Замечание 1. Теорема 2 также будет верна для возмущенных систем вида

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta_0(t))x(t) + (B + \Delta_1(t))x(\theta(t)),$$

где $\Delta_0(t)$ и $\Delta_1(t)$ — непрерывные и ограниченные при $t \geq t_0 > 0$ функции, а $\theta(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям $0 < \theta(t) < t$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) = +\infty$, $d\theta(t)/dt > 0$.

4. Пример. Пусть все собственные числа матрицы A отрицательны, а все собственные числа матрицы $A^{-1}B$ лежат внутри круга радиуса $\alpha^{1/2}$. Например, этим условиям удовлетворяет система

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -3x_1(t) - x_1(t/2) + 2x_2(t/2), \\ \dot{x}_2(t) &= -2x_2(t) + x_2(t/2).\end{aligned}$$

Тогда сходимость интеграла (4) имеет место при $\gamma = 2$, и можно построить квадратичный функционал Ляпунова — Красовского аналогично тому, как это сделано в работе [4].

5. Заключение. Доказанные теоремы 1, 2 составляют необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1) для всех случаев, за исключением $\{\bar{\lambda} \leq 0, \bar{\mu} = 0\}$ и $\{\bar{\lambda} = 0, \bar{\mu} \leq 0\}$. Построен функционал Ляпунова — Красовского, который может быть применен для анализа устойчивости по отношению к неопределенности в коэффициентах и в запаздывании. Конструктивные методы нахождения этого функционала в общем случае представляют интерес для дальнейшего исследования.

Литература

1. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения / Пер. с англ. под ред. Л. Э. Эльсгольца. М.: Изд-во МИР, 1967. 548 с.
2. Laktionov A. A., Zhabko A. P. The method of difference transformations for differential systems with linear time-delay // Linear Time Delay Systems (LTDS), Grenoble, France, 1998. P. 201–205.
3. Жабко А. П., Лактионов А. А. Метод разностных преобразований для систем дифференциальных уравнений с линейным запаздыванием // Вопросы механики и процессов управления. Вып. 19. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2003. С. 45–54.
4. Kharitonov V. L., Zhabko A. P. Lyapunov — Krasovskii approach to the robust stability analysis of time delay systems // Automatica, 2003. Vol. 39. P. 15–20.

Молчанова И. Ю., Попова М. А.
Санкт-Петербургский государственный университет

Алгоритм построения двойственного конуса в трехмерном пространстве

Рекомендовано к публикации профессором Поляковой Л. Н.

1. Постановка задачи. Рассмотрим выпуклый многогранный конус

$$Q = \text{cone co} \left\{ \bigcup_{i=1}^n a_i \right\}, \quad a_i \in \mathbb{R}^3, \quad a_i \neq 0.$$

Предположим, что конус Q является телесным (с непустой внутренностью) и острым.

Необходимо построить конус C , двойственный к конусу Q ,

$$C = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle a_i, x \rangle \leq 0, \quad a_i \in \mathbb{R}^3, \quad i = \overline{1, n} \}. \quad (1)$$

Множество C также является выпуклым многогранным конусом. Предположим, что конус C является острым. Напомним, что конус называется *острым* [1], если он не содержит прямых. Известно, что выпуклый многогранный конус может быть представлен в виде выпуклой конической оболочки конечного числа крайних векторов. Следовательно, конус C может быть представлен в виде

$$C = \text{cone co} \left\{ \bigcup_{i=1}^p b_i \right\}, \quad b_i \in \mathbb{R}^3,$$

где $b_i, i = \overline{1, p}$, — крайние векторы конуса C .

2. Предварительные построения. Так как конус Q — острый, то повернем его таким образом, чтобы он лежал в верхнем полупространстве. Эту операцию произведем с помощью преобразования Хаусхолдера [2]. Для этого необходимо найти вектор, который будет полностью лежать внутри конуса Q и составлять с каждым вектором a_i острый угол. Его можно найти, если решить определенную задачу квадратичного программирования. Обозначим этот вектор через

v . Поскольку $v \in Q$, то его можно представить в виде выпуклой линейной комбинации векторов

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Найдем коэффициенты λ_i . Рассмотрим матрицу

$$G = \begin{pmatrix} \langle a_1, a_1 \rangle & \dots & \langle a_1, a_n \rangle \\ \dots & \dots & \dots \\ \langle a_n, a_1 \rangle & \dots & \langle a_n, a_n \rangle \end{pmatrix}.$$

Введем вектор $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ и составим квадратичную функцию

$$f(\lambda) = \frac{1}{2} \langle G\lambda, \lambda \rangle.$$

Решая задачу квадратичного программирования

$$\min_{\sum \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0} F(\lambda),$$

найдем коэффициенты λ_i и построим вектор v , обладающий нужным свойством.

3. Алгоритм преобразования Хаусхолдера. К вектору v применим преобразование Хаусхолдера таким образом, чтобы после поворота этот вектор совпал с осью Oz , т. е. $v' = (0, 0, z)^T$. Опишем это преобразование.

Дан вектор $v = (x_v, y_v, z_v)^T \in \mathbb{R}^3$, к которому применяем оператор Хаусхолдера. Матрица оператора имеет вид

$$H = E_3 - \frac{2uu^T}{u^T u},$$

где

$$\begin{aligned} u &= v + \sigma \|v\| e_1, \\ \sigma &= \begin{cases} -1, & \text{если } v_1 \geq 0, \\ 1, & \text{если } v_1 < 0, \end{cases} \\ e_1 &= (0, 0, 1)^T. \end{aligned} \tag{2}$$

Введение константы σ позволяет уменьшить влияние ошибок округления.

Применяя оператор H , построенный таким образом, к нашему вектору v , получим

$$v' = Hv.$$

Вектор v' будет лежать на оси Oz и иметь нулевые координаты по осям Oy и Ox . Далее применим полученное преобразование к векторам a_i . Имеем

$$a'_i = Ha_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Таким образом, конус Q повернулся и все векторы a'_i лежат в верхнем полупространстве. Обозначим его через

$$Q' = \text{cone co} \left\{ \bigcup_{i=1}^n a'_i \right\}, \quad a'_i \in \mathbb{R}^3.$$

Разделим все векторы a'_i на их третью координату, чтобы на этом месте получить единицу. Теперь концы всех векторов a'_i лежат в одной плоскости $z = 1$.

4. Построение выпуклой оболочки. Для построения двойственного конуса надо исключить векторы a'_i , которые лежат во внутренности конуса Q' .

Для этого необходимо найти вершины выпуклой оболочки векторов a'_i . Рассмотрим алгоритм построения выпуклой оболочки в пространстве \mathbb{R}^2 , поскольку концы векторов a'_i лежат в плоскости $z = 1$.

Существует несколько алгоритмов для построения выпуклой оболочки в \mathbb{R}^2 . Рассмотрим, например, алгоритм обхода Грехема [3, 4].

Пусть задано множество точек на плоскости. Просмотр начинаем с точки, помеченной как «начало», в качестве которой берем самую правую с наименьшей ординатой точку из данного множества. Эта точка заведомо является вершиной выпуклой оболочки. Дальше тройки последовательных точек многократно проверяются в порядке обхода против часовой стрелки с целью определить, образуют они или нет они угол, больший или равный π .

Если внутренний угол $a_1 a_2 a_3 \geq \pi$, то говорят, что $a_1 a_2 a_3$ образуют «правый поворот», иначе они образуют «левый поворот». Из

выпуклости многоугольника следует, что при его обходе будут делаться только левые повороты. Если $a_1a_2a_3$ образует «правый поворот», то точка a_2 не может быть крайней точкой, так как она является внутренней. В зависимости от результата проверки угла, образуемого текущей тройкой точек, возможны два варианта:

1. Внутренний угол $a_1a_2a_3$ образует «правый поворот». Удалить вершину a_2 и проверить тройку $a_0a_1a_3$.
2. Внутренний угол $a_1a_2a_3$ образует «левый поворот». Продолжить, перейдя к проверке $a_2a_3a_4$.

Просмотр завершается, когда обойдя все вершины придем в точку «начало». Результатом будет список вершин выпуклой оболочки, расположенных в нужном порядке.

5. Построение двойственного конуса. Спроектируем точку $t = (0, 0, 1)^T$ на грани конуса Q' . Векторы a'_i отсортированы так, что внутренних граней не будет, так как все лучи, натянутые на векторы a'_i будут крайними для конуса Q' и расположены в нужном порядке. Рассмотрим грань, образованную парой векторов

$$\begin{cases} a'_1 = (x_1, y_1, z_1), \\ a'_2 = (x_2, y_2, z_2). \end{cases} \quad (3)$$

Составим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}.$$

Матрица оператора проектирования на эту грань имеет вид

$$P_{a_1, a_2} = A^T(AA^T)^{-1}A = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}.$$

Так как проектируем точку $t = (0, 0, 1)^T$, то ее проекция на грань, образованную векторами a'_1 и a'_2 , будет находиться по формуле:

$$t_{a_1, a_2} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \end{pmatrix},$$

где

$$p_{13} = \frac{x_1}{\alpha_1\alpha_2 - \beta^2}(\alpha_2 - \beta) + \frac{x_2}{\alpha_1\alpha_2 - \beta^2}(\alpha_1 - \beta),$$

$$p_{23} = \frac{y_1}{\alpha_1\alpha_2 - \beta^2}(\alpha_2 - \beta) + \frac{y_2}{\alpha_1\alpha_2 - \beta^2}(\alpha_1 - \beta),$$

$$p_{33} = \frac{\alpha_1 - 2\beta + \alpha_2}{\alpha_1\alpha_2 - \beta^2},$$

$$\alpha_1 = x_1^2 + y_1^2 + 1, \quad \alpha_2 = x_2^2 + y_2^2 + 1, \quad \beta = x_1x_2 + y_1y_2 + 1.$$

Аналогично рассматриваем попарно все векторы a'_i , $i = \overline{1, n}$, и проектируем точку $t = (0, 0, 1)^T$ на каждую грань.

6. Заключение. Отрезок, соединяющий точку $t = (0, 0, 1)^T$ и ее проекцию, лежит на луче, который является крайним лучом двойственного к Q' конуса Q'^* (знак «'» означает, что конус был повернут преобразованием Хаусхолдера). Следовательно, когда найдем все образующие $(a'_i)^*$, $i = \overline{1, n}$, то построим двойственный конус

$$Q'^* = \text{cone со } \left\{ \bigcup_{i=1}^n (a'_i)^* \right\}.$$

К построенному конусу Q'^* снова применим преобразование Хаусхолдера, чтобы развернуть его на место. Для матрицы обратного преобразования Хаусхолдера справедливо

$$H^{-1} = H^T = H$$

в силу симметричности и ортогональности матрицы H . Таким образом, построенный конус является двойственным конусом Q^* для конуса Q .

Литература

1. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 472 с.
2. Лоусон Ч., Хенсон Р. Численное решение задач метода наименьших квадратов. М.: Наука: Физматлит, 1986. 232 с.
3. Препарата Ф., Шеймос М. Вычислительная геометрия: Введение / Пер с англ. М.: Мир, 1989. 478 с.
4. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К. Алгоритмы. Построение и анализ, 3-е издание / Пер с англ. М.: Издат. дом «Вильямс», 2012. 1296 с.

Нгуен Динь Хуен
Санкт-Петербургский государственный университет

Об абсолютной устойчивости одного класса нелинейных разностных систем

Рекомендовано к публикации профессором Александровым А. Ю.

1. Введение. Одной из важных проблем, возникающих при изучении нелинейных систем, является проблема абсолютной устойчивости [1, 2]. Эта проблема имеет как теоретическую, так и прикладную значимость [3, 4]. Основным подходом для нахождения условий абсолютной устойчивости является прямой метод Ляпунова. С помощью этого подхода получены критерии абсолютной устойчивости для многих типов систем. Однако следует отметить, что до сих пор не существует общих методов построения функций Ляпунова для нелинейных систем.

В настоящей работе исследуется некоторый класс разностных систем. С использованием предложенного в [5] способа построения функций Ляпунова устанавливаются достаточные условия абсолютной устойчивости рассматриваемых систем.

2. Постановка задачи. Пусть задана система

$$y_i(k+1) = y_i(k) + hc_i f_i(y_i(k)) + h \sum_{j=1}^{k_i} a_{ij} f_1^{\alpha_{i1}^{(j)}}(y_1(k)) \dots f_n^{\alpha_{in}^{(j)}}(y_n(k)). \quad (1)$$

Здесь c_i, a_{ij} — постоянные коэффициенты; $k = 0, 1, \dots$; h — шаг дискретизации, $h > 0$; $\alpha_{is}^{(j)}$ — неотрицательные рациональные числа с нечетными знаменателями; функции $f_i(z_i)$ определены, непрерывны при $|z_i| < H$, $0 < H \leq +\infty$, и удовлетворяют условию $z_i f_i(z_i) > 0$ при $z_i \neq 0$ и условию Липшица, т. е. можно указать положительную постоянную L такую, что

$$\left| f_i(\tilde{z}_i) - f_i(\tilde{\tilde{z}}_i) \right| \leq L \left| \tilde{z}_i - \tilde{\tilde{z}}_i \right|, \quad i = 1, \dots, n,$$

при всех $|\tilde{z}_i| < H, |\tilde{\tilde{z}}_i| < H$.

Основная цель настоящей работы — с помощью предложенного в [5] способа построения функций Ляпунова получить достаточные условия абсолютной устойчивости данной системы.

3. Условия абсолютной устойчивости. Пусть справедливы неравенства $\sum_{s=1}^n \alpha_{is}^{(j)} > 0$, $j = 1, \dots, k_i$, $i = 1, \dots, n$. Выполнение этого предложения гарантирует существование нулевого решения системы (1). Кроме того, будем считать, что коэффициенты $c_i < 0$.

Будем называть систему (1) абсолютно устойчивой, если нулевое решение этой системы асимптотически устойчиво при любых допустимых функциях $f_1(z_1), \dots, f_n(z_n)$.

Теорема 1. *Если существуют положительные числа $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, удовлетворяющие неравенствам*

$$\sum_{s=1}^n \frac{\alpha_{is}^{(j)}}{\gamma_s + 1} > \frac{1}{\gamma_i + 1}, \quad j = 1, \dots, k_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2)$$

то можно указать число $h_0 > 0$ такое, что при всех $h \in (0, h_0)$ нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Пусть $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ — положительное решение системы (2). Не умаляя общности, можно считать, что γ_i — рациональные числа с нечетными числителями и знаменателями, причем $\gamma_i > 1$, $i = 1, \dots, n$. Функцию Ляпунова выбираем в виде

$$V(z) = \sum_{i=1}^n \int_0^{z_i} f_i^{\gamma_i}(\tau) d\tau. \quad (3)$$

Из условий, которым удовлетворяют функции $f_i(z_i)$ и числа γ_i , следует, что функция (3) положительно определена. Вычислим ее приращение на решениях системы (1). Имеем

$$\begin{aligned} \Delta V &= \sum_{i=1}^n \int_{y_i(k)}^{y_i(k+1)} f_i^{\gamma_i}(\tau) d\tau = \\ &= \sum_{i=1}^n (y_i(k+1) - y_i(k)) f_i^{\gamma_i}(y_i(k)) + \theta_{ik} \Delta y_i(k), \end{aligned}$$

где $\theta_{ik} \in (0, 1)$, $\Delta y_i(k) = y_i(k+1) - y_i(k)$.

При всех $k = 0, 1, \dots$ справедлива оценка

$$\begin{aligned}
\Delta V \leq & \sum_{i=1}^n h c_i f_i^{\gamma_i+1}(y_i(k)) + \\
& + \sum_{i=1}^n h f_i^{\gamma_i}(y_i(k)) \sum_{j=1}^{k_i} a_{ij} f_1^{\alpha_{i1}^{(j)}}(y_1(k)) \dots f_n^{\alpha_{in}^{(j)}}(y_n(k)) + \\
& + \sum_{i=1}^n h^{\gamma_i+1} \gamma_i L^{\gamma_i} \theta_{ik} \bar{\theta}_{ik}^{\gamma_i-1} c_i^2 \beta |f_i(y_i(k))|^2 \times \\
& \times \left| c_i f_i(y_i(k)) + \sum_{j=1}^{k_i} a_{ij} f_1^{\alpha_{i1}^{(j)}}(y_1(k)) \dots f_n^{\alpha_{in}^{(j)}}(y_n(k)) \right|^{\gamma_i-1} + \\
& + \sum_{i=1}^n h^2 \gamma_i L \theta_{ik} c_i^2 \beta |f_i(y_i(k))|^{\gamma_i+1} + \\
& + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} h^{\gamma_i+1} \gamma_i L^{\gamma_i} \theta_{ik} \bar{\theta}_{ik}^{\gamma_i-1} c_i^2 \beta \left| f_1^{\alpha_{i1}^{(j)}}(y_1(k)) \dots f_n^{\alpha_{in}^{(j)}}(y_n(k)) \right|^2 \times \\
& \times \left| c_i f_i(y_i(k)) + \sum_{j=1}^{k_i} a_{ij} f_1^{\alpha_{i1}^{(j)}}(y_1(k)) \dots f_n^{\alpha_{in}^{(j)}}(y_n(k)) \right|^{\gamma_i-1} + \\
& + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} h^2 \gamma_i L \theta_{ik} a_{ij}^2 \beta \left| f_1^{\alpha_{i1}^{(j)}}(y_1(k)) \dots f_n^{\alpha_{in}^{(j)}}(y_n(k)) \right|^2 |f_i(y_i(k))|^{\gamma_i-1},
\end{aligned}$$

где $\bar{\theta}_{ik} \in (0, 1)$.

Используя свойства функций $f_i(y_i)$, $i = 1, \dots, n$, получаем, что если справедливы неравенства (2), то существуют числа $h_0 > 0$ и $\delta > 0$ такие, что при $h \in (0, h_0)$, $\|y(k)\| < \delta$ имеем

$$\Delta V \leq -h\tilde{c} \sum_{i=1}^n |f_i(y_i(k))|^{\gamma_i+1},$$

где $\tilde{c} > 0$. Значит $V(z)$ удовлетворяет требованиям дискретного аналога теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости [6]. Следовательно, система (1) абсолютно устойчива.

Теорема доказана.

Пример. Пусть система (1) имеет вид

$$\begin{aligned} y_1(k+1) &= y_1(k) + hc_1 f_1(y_1(k)) + ha_{23} f_2^{\alpha_2}(y_2(k)) f_3^{\frac{1}{3}}(y_2(k)), \\ y_2(k+1) &= y_2(k) + hc_2 f_2(y_2(k)) + ha_{31} f_3^{\frac{1}{3}}(y_2(k)) f_1^{\frac{1}{5}}(y_1(k)), \\ y_3(k+1) &= y_3(k) + hc_3 f_3(y_1(k)) + ha_{21} f_2^{\alpha_2}(y_2(k)) f_1^{\frac{1}{7}}(y_1(k)). \end{aligned}$$

Рассмотрим неравенства (2), соответствующие этой системе. Получаем

$$\alpha_2 \varphi_2 + \frac{1}{3} > \varphi_1, \quad \frac{1}{3} \varphi_3 + \frac{1}{5} \varphi_1 > \varphi_2, \quad \alpha_2 \varphi_2 + \frac{1}{7} > \varphi_3,$$

где $\varphi_1 = 1/(\gamma_1 + 1)$, $\varphi_2 = 1/(\gamma_2 + 1)$, $\varphi_3 = 1/(\gamma_3 + 1)$.

Тогда можно указать число $h_0 > 0$ такое, что при $h \in (0, h_0)$ для абсолютной устойчивости данной системы достаточно, чтобы выполнялось неравенство $\alpha_2 > 25/17$.

4. Оценки решений. Предложенный в [5] способ построения функций Ляпунова позволяет оценить скорость стремления к началу координат решений системы (1). Рассмотрим случай, когда функции $f_i(z_i)$ определяются по формулам $f_i(z_i) = z_i^{\delta_i}$, $\delta_i > 1$, где δ_i — рациональные числа с нечетными знаменателями. Тогда функция Ляпунова (3) принимает вид

$$V(z) = \sum_{i=1}^n \int_0^{z_i} \tau^{\gamma_i \delta_i} d\tau = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\gamma_i \delta_i + 1} z_i^{\gamma_i \delta_i + 1}(k).$$

Не умаляя общности, будем предполагать, что $\delta_1 \leq \dots \leq \delta_n$. Из доказательства теоремы 1 следует существование числа ε , $0 < \varepsilon < 1$, такого, что если $k_0 \geq 0$, $\|y_0\| < \varepsilon$, то при всех $k \geq k_0$ имеем

$$\begin{aligned} V(y(k+1)) &\leq V(y(k)) - \tilde{c} \sum_{i=1}^n f_i^{\gamma_i + 1}(y(k)) = \\ &= V(y(k)) - \tilde{c} \sum_{i=1}^n y^{\gamma_i \delta_i + \delta_i}(k) = V(y(k)) - \tilde{c} \sum_{i=1}^n y^{(\gamma_i \delta_i + 1) \frac{\gamma_i \delta_i + \delta_i}{\gamma_i \delta_i + 1}}(k), \end{aligned}$$

где $y(k)$ — решение, проходящее при $k = k_0$ через точку y_0 ; \tilde{c} — положительная постоянная.

Значит для $k = k_0, k_0 + 1, \dots$ выполняется соотношение

$$V(y(k+1)) \leq V(y(k)) - \tilde{a} V^{\frac{\gamma_{\max} \delta_n + \delta_n}{\gamma_{\min} \delta_1 + 1}}(y(k)).$$

Здесь $\gamma_{max} = \max\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$, $\gamma_{min} = \min\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$, \tilde{a} — положительная постоянная, не зависящая от начальных данных рассматриваемого решения.

Применяя лемму, доказанную в работе [7], получаем следующую

Теорема 2. *Существуют положительные числа $\varepsilon, d_{1i}, d_{2i}$, $i = 1, \dots, n$, такие, что для любого решения $y(k) = (y_1(k), \dots, y_n(k))^*$ системы (1) с начальными данными $y(k_0) = y_0$, удовлетворяющими условиям $k_0 \geq 0, \|y_0\| < \varepsilon$, при всех $k \geq k_0$ справедливы оценки*

$$|y_i(k)| \leq d_{1i} (1 + d_{2i}(k - k_0))^{-\frac{1}{\left(\frac{\gamma_{max} \delta_n + \delta_n}{\gamma_{min} \delta_1 + 1} - 1\right)}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Замечание. В теореме 2 значения постоянных $\varepsilon, d_{1i}, d_{2i}$, $i = 1, \dots, n$, вообще говоря, зависят от выбранного шага дискретизации h .

Литература

1. Барбашин Е. А. Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970. 240 с.
2. Воронов А. А. Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. М.: Наука, 1979. 336 с.
3. Летов А. М. Устойчивость нелинейных регулируемых систем. М.: Гостехиздат, 1955. 312 с.
4. Лурье А. И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. М.: Гостехиздат, 1951. 216 с.
5. Александров А. Ю., Жабко А. П. О сохранении устойчивости при дискретизации систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Сибирский математический журнал, 2010. Т. 51, № 3. С. 481—497.
6. Александров А. Ю., Жабко А. П. Устойчивость разностных систем. СПб.: НИИ Химии СПбГУ, 2003. 112 с.
7. Александров А. Ю., Жабко А. П. Об устойчивости решений одного класса нелинейных разностных систем // Сибирский математический журнал, 2003. Т. 44, № 6. С. 1217—1225.

Пономарев А. А.

Санкт-Петербургский государственный университет

Построение субоптимальных управлений в регуляторе «предиктор-корректор» (МРС)

Рекомендовано к публикации профессором Жабко А. П.

Введение. Рассмотрим скалярную управляемую систему дискретного времени

$$x(k+1) = f(x(k)) + u(k), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

где $x, u \in \mathbb{R}$, $f(0) = 0$. Множество $\mathcal{X} = \{x : |x| \leq H_x\}$, где $H_x > 0$, назовём множеством *допустимых состояний* системы. Будем считать функцию $f(x)$ аналитичной на множестве \mathcal{X} и удовлетворяющей условию Липшица

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L(f)|x_1 - x_2| \quad \text{при всех } x_1, x_2 \in \mathcal{X},$$

где $L(f)$ — неотрицательная постоянная.

Предположим, что любому управлению $u(\cdot)$ отвечает решение задачи Коши для уравнения (1) с условием $x(k_0) = x_0$, определённое при $k \geq k_0$. Обозначим его $X(\cdot, x_0, k_0, u(\cdot))$. Для характеристики управления $u(\cdot)$ при $x(0) = x_0 \in \mathcal{X}$ введём *функционал качества*

$$\mathcal{J}(x_0, u(\cdot)) = \sum_{k=0}^{T-1} \left(X^2(k+1, x_0, 0, u(\cdot)) + \lambda u^2(k) \right), \quad (2)$$

где $T \in \mathbb{N}$, $\lambda > 0$. Множеством *допустимых управлений* при $x(0) = x_0 \in \mathcal{X}$ назовём множество $\mathcal{U}(x_0)$ таких управлений $u(\cdot)$, что

$$|u(k)| \leq H_u, \quad X(k+1, x_0, 0, u(\cdot)) \in \mathcal{X} \quad \text{при } k = 0, 1, \dots, T-1,$$

где $H_u > 0$. Условимся, что при любом начальном состоянии $x_0 \in \mathcal{X}$ множество $\mathcal{U}(x_0)$ не пусто и существует *оптимальное управление*

$$u^\circ(\cdot, x_0) = \arg \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}(x_0)} \mathcal{J}(x_0, u(\cdot)), \quad (3)$$

на котором функционал (2) принимает значение $\mathcal{J}^\circ(x_0)$.

В данной работе изучается метод «предиктор-корректор» или MPC (Model Predictive Control) [1]. Он состоит в том, что в систему подаётся управление в виде обратной связи $u = u^\circ(0, x)$. Таким образом, замкнутая система имеет вид

$$x(k+1) = f(x(k)) + u^\circ(0, x(k)), \quad k = 0, 1, \dots$$

Постановка задачи. Применение MPC к нелинейной системе требует решения нелинейной оптимизационной задачи (3) при постоянно обновляющихся начальных условиях. Поэтому для использования MPC в реальном времени имеет смысл упростить этот алгоритм за счёт поиска не оптимального, но так называемого *субоптимального* управления [2], близкого к оптимальному в смысле близости значения функционала (2) к минимуму. Цель дальнейших рассуждений состоит в том, чтобы исследовать возможность построения субоптимального управления, в заданной степени близкого к оптимальному и относительно просто вычисляемого.

Оценка качества субоптимального управления. Пусть известно оптимальное управление $u^\circ(\cdot, \xi)$ для некоторого $\xi \in \mathcal{X}$. Если в задаче (3) $x_0 \in U_r(\xi) = \{x : |x - \xi| \leq r\} \subset \mathcal{X}$, то построим каким-либо образом вместо оптимального управления $u^\circ(\cdot, x_0)$ управление $u^*(\cdot, x_0) \in \mathcal{U}(x_0)$ и оценим разность

$$\mathcal{J}^*(x_0) - \mathcal{J}^\circ(x_0) \leq \mathcal{J}^*(x_0) - \mathcal{J}^\circ(\xi) + |\mathcal{J}^\circ(\xi) - \mathcal{J}^\circ(x_0)|, \quad (4)$$

где $\mathcal{J}^*(x_0) = \mathcal{J}(x_0, u^*(\cdot, x_0))$. Малость этой разности характеризует качественную близость построенного управления к оптимальному. Для дальнейших оценок потребуется следующая

Лемма 1. *Функция $\mathcal{J}^\circ(x)$ удовлетворяет условию Липшица*

$$|\mathcal{J}^\circ(x_1) - \mathcal{J}^\circ(x_2)| \leq L(\mathcal{J}^\circ)|x_1 - x_2| \quad \text{при всех } x_1, x_2 \in \mathcal{X},$$

где $L(\mathcal{J}^\circ)$ — некоторая постоянная.

Доказательство. Введём семейство функционалов

$$\mathcal{J}_k(x, u(\cdot)) = \sum_{\varkappa=k}^{T-1} \left(X^2(\varkappa+1, x, k, u(\cdot)) + \lambda u^2(\varkappa) \right),$$

заданных при $0 \leq k \leq T-1$, $x \in \mathcal{X}$ и $u(\cdot) \in \mathcal{U}_k(x) = \{u(\cdot) : |u(\varkappa)| \leq H_u, X(\varkappa+1, x, k, u(\cdot)) \in \mathcal{X} \text{ при } \varkappa \in [k, T-1]\}$. Минимальные

значения этих функционалов обозначим $\mathcal{J}_k^\circ(x)$ и докажем липшицевость всех функций $\mathcal{J}_k^\circ(x)$, начиная с $k = T - 1$ и до $k = 0$. Функция

$$\mathcal{J}_{T-1}^\circ(x) = \min_{\substack{|u| \leq H_u \\ (f(x) + u) \in \mathcal{X}}} \left((f(x) + u)^2 + \lambda u^2 \right)$$

удовлетворяет условию Липшица, поскольку такому условию на множестве $x \in \mathcal{X}$ удовлетворяют минимизируемая функция и границы множества допустимых значений u . По той же причине, если липшицева функция $\mathcal{J}_{k+1}^\circ(x)$, то липшицева и

$$\mathcal{J}_k^\circ(x) = \min_{\substack{|u| \leq H_u \\ (f(x) + u) \in \mathcal{X}}} \left((f(x) + u)^2 + \lambda u^2 + \mathcal{J}_{k+1}^\circ(f(x) + u) \right).$$

Следовательно, по индукции свойство липшицевости распространяется на функцию $\mathcal{J}_0^\circ(x) = \mathcal{J}^\circ(x)$.

Лемма 1 доказана.

Используя лемму 1, из неравенства (4) получим

$$\mathcal{J}^*(x_0) - \mathcal{J}^\circ(x_0) \leq \mathcal{J}^*(x_0) - \mathcal{J}^\circ(\xi) + L(\mathcal{J}^\circ)|x_0 - \xi|,$$

поэтому справедлива следующая

Теорема. *Если управление $u^*(\cdot, x_0)$ выбрано так, что*

$$\mathcal{J}^*(x_0) - \mathcal{J}^\circ(\xi) \leq K|x_0 - \xi|$$

при всех $x_0 \in U_r(\xi)$, то при $x_0 \in U_r(\xi)$ оно доставляет функционалу $\mathcal{J}(x_0, u(\cdot))$ значение, которое не более чем на $r(L(\mathcal{J}^\circ) + K)$ превышает минимум, равный $\mathcal{J}^\circ(x_0)$.

Чем меньше K , тем ближе значение $\mathcal{J}^*(x_0)$ к оптимальному. Выбор субоптимального управления, при котором константа K минимальна, зависит от особенностей конкретной задачи. Покажем сейчас, что существует субоптимальное управление хотя бы с некоторым значением K .

Построение субоптимального управления. Можно предложить по крайней мере два способа построения управления $u^*(\cdot, x_0)$, удовлетворяющего условию теоремы. Первый способ — выбрать значение $u^*(0, x_0)$, исходя из ограничений

$$|u^*(0, x_0)| \leq H_u, \quad |x^*(1)| \leq H_x,$$

где $x^*(1) = f(x_0) + u^*(0, x_0)$, и дополнить его управлением, оптимальным для функционала $\mathcal{J}_1(x^*(1), u(\cdot))$, введённого при доказательстве леммы 1. То, что это управление неизвестно, не является препятствием, поскольку в алгоритме МРС используется только $u^*(0, x_0)$. Соответствующее значение функционала можно представить в виде

$$\mathcal{J}^*(x_0) = (x^*(1))^2 + \lambda(u^*(0, x_0))^2 + \mathcal{J}_1^\circ(x^*(1))$$

и, благодаря липшицевости функции $\mathcal{J}_1^\circ(x)$ с некоторой константой Липшица $L(\mathcal{J}_1^\circ)$, установленной в ходе доказательства леммы 1, оценить левую часть неравенства из условия теоремы как

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^*(x_0) - \mathcal{J}^\circ(\xi) &\leq (2H_x L(f) + L(\mathcal{F}_1^\circ))|x_0 - \xi| + \\ &+ (2H_x + 2\lambda H_u + L(\mathcal{F}_1^\circ))|u^*(0, x_0) - u^\circ(0, \xi)|. \end{aligned}$$

Если на управление $u^*(0, x_0)$ наложить требование

$$|u^*(0, x_0) - u^\circ(0, \xi)| \leq L(u^*)|x_0 - \xi|,$$

где $L(u^*)$ — некоторая постоянная, то этого достаточно для выполнения условия теоремы 1.

Другой способ, который, возможно, даёт лучшее значение константы K , состоит в линеаризации системы (1) в окрестности оптимальной траектории с начальным условием $x(0) = \xi$, однако он применим, только если ограничения на управление и состояние системы не активны вдоль указанной траектории. Введём переменные $y(\cdot) = x(\cdot) - X(\cdot, \xi, 0, u^\circ(\cdot, \xi))$ и $v(\cdot) = u(\cdot) - u^\circ(\cdot, \xi)$, которые удовлетворяют уравнению

$$y(k+1) = a(k)y(k) + v(k) + g(k, y(k)), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (5)$$

где $|g(k, y)| \leq My^2$ при всех допустимых y . Функционал $\mathcal{J}(x_0, u(\cdot))$ в новых переменных принимает вид

$$\mathcal{F}(y_0, v(\cdot)) = \mathcal{J}^\circ(\xi) + \sum_{k=0}^{T-1} \ell(k, Y(k+1, y_0, 0, v(\cdot)), v(k)),$$

где $\ell(k, y, v) = \alpha(k+1)y + \beta(k)v + y^2 + \lambda v^2$, $\alpha(k) = 2X(k, \xi, 0, u^\circ(\cdot, \xi))$, $\beta(k) = 2\lambda u^\circ(k, \xi)$, а $Y(\cdot, y_0, 0, v(\cdot))$ — общее решение уравнения (5).

Рассмотрим также линеаризованную систему

$$\bar{y}(k+1) = a(k)\bar{y}(k) + v(k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (6)$$

с общим решением $\bar{Y}(\cdot, \bar{y}_0, k_0, v(\cdot))$. Значение функционала \mathcal{F} на траектории системы (6) обозначим $\bar{\mathcal{F}}(y_0, v(\cdot))$ и построим управление $\bar{v}^\circ(\cdot, y_0)$, минимизирующее это значение, не учитывая ограничений на \bar{y} и v , которые, естественно, вытекают из определения допустимых множеств \mathcal{X} и \mathcal{U} . Оно обладает следующим свойством.

Лемма 2. *Для любого начального условия y_0 существует единственное оптимальное управление $\bar{v}^\circ(\cdot, y_0)$, и его связь с соответствующим движением — линейная однородная:*

$$\bar{v}^\circ(k, y_0) = s(k)\bar{Y}(k, y_0, 0, \bar{v}^\circ(\cdot, y_0)),$$

где $s(\cdot)$ — некоторые коэффициенты, не зависящие от y_0 .

Доказательство. Существование, единственность и линейность оптимального управления имеют место по аналогии с известными результатами для систем непрерывного времени [3]. Докажем однородность: $\bar{v}^\circ(k, 0) \equiv 0$. Пусть это не так, т. е. существует ненулевое управление $\tilde{v}(\cdot)$, при котором $\bar{\mathcal{F}}(0, \tilde{v}(\cdot)) < \bar{\mathcal{F}}(0, 0) = \mathcal{J}^\circ(\xi_i)$. Подставим управление $v(\cdot) = \varepsilon\tilde{v}(\cdot)$ в уравнение (5) при нулевом начальном условии. Здесь ε — произвольное число, достаточно малое, чтобы управление $\varepsilon\tilde{v}(\cdot)$ было допустимым; такие ε существуют, поскольку мы считаем ограничения не активными на траектории $v(\cdot) \equiv 0$, $y(\cdot) \equiv 0$. Соответствующее значение функционала $\mathcal{F}(0, \varepsilon\tilde{v}(\cdot))$ — аналитическая функция ε , причём

$$\left. \frac{\partial \mathcal{F}(0, \varepsilon\tilde{v}(\cdot))}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \left. \frac{\partial \bar{\mathcal{F}}(0, \varepsilon\tilde{v}(\cdot))}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0},$$

но $\bar{\mathcal{F}}(0, \varepsilon\tilde{v}(\cdot))$ — квадратичная функция относительно ε , и, не достигая по предположению минимума при $\varepsilon = 0$, она имеет при $\varepsilon = 0$ отличную от нуля производную по ε , что, в силу последнего равенства, противоречит оптимальности тождественно нулевого управления для системы (5) с нулевыми начальными условиями и, следовательно, оптимальности управления $u^\circ(\cdot, \xi)$ для системы (1) с начальным условием ξ . Получили противоречие.

Лемма 2 доказана.

Если управление $\bar{v}^\circ(\cdot, y_0)$ построено, то в качестве субоптимального решения задачи (3) выберем управление

$$u^*(\cdot, x_0) = u^\circ(\cdot, \xi) + \bar{v}^\circ(\cdot, x_0 - \xi).$$

Если ограничения не активны вдоль оптимальной траектории, исходящей из точки ξ , то это управление будет допустимым при всех

$x_0 \in U_r(\xi)$ при достаточно малом r . Кроме того, в данном случае также применима доказанная теорема.

Оценка области устойчивости. Пусть $V(x)$ — положительно-определённая функция, \bar{V} — положительное число, и множество, определяемое неравенствами

$$V(x) < \bar{V}, \quad |x| < H_x, \quad (7)$$

покрыто конечным набором окрестностей $\{U_{r_i}(\xi_i)\}_{i=1}^N$, в каждой из которых при допустимых x определено субоптимальное управление $u^*(\cdot, x)$, удовлетворяющее в желаемой степени критерию малости функционала качества. Тогда если

$$V(f(x) + u^*(0, x)) - V(x) < -x^2$$

при всех x из множества (7), то множество (7) является оценкой снизу области устойчивости системы (1) при управлении с помощью МРС, основанного на субоптимальном решении задачи (3).

Выводы. Представляется теоретически возможным, разбив фазовое пространство системы на малые области, построить в каждой из них семейство субоптимальных управлений, которые вычисляются достаточно просто для реализации в реальном времени. Кроме того, благодаря аналитическому выражению субоптимальных управлений можно рассчитывать на получение оценок области устойчивости субоптимального МРС.

Литература

1. Maciejowski J. M. Predictive control with constraints. London: Prentice Hall, 2001. 331 p.
2. Sokaert P. O. M., Mayne D. Q., Rawlings J. B. Suboptimal model predictive control (feasibility implies stability) // IEEE Transactions on Automatic Control, 1999. Vol. 44, No. 3. P. 648–654.
3. Зубов В. И. Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975. 496 с.

Сумачева В. А.

Санкт-Петербургский государственный университет

Системы нейтрального типа: \mathcal{H}_2 норма передаточной матрицы

Рекомендовано к публикации профессором Харитоновым В. Л.

1. Введение. Норма передаточной матрицы играет важную роль в исследовании динамических систем. С ее помощью производится оценка влияния внешних воздействий на выходной сигнал системы. В качестве внешнего входного сигнала часто рассматриваются возмущающие воздействия и помехи, которые присутствуют, например, в виде порывов ветра или волн в задачах стабилизации движения летательных аппаратов или морских объектов. Уровень их подавления оценивается с помощью \mathcal{H}_2 нормы передаточной матрицы, которая в задаче выступает в качестве критерия оптимальности.

Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что для вычисления \mathcal{H}_2 нормы достаточно найти решение классического матричного уравнения Ляпунова со специально выбранной правой частью [3].

В статье [2] этот метод был распространен на случай систем с запаздываниями: \mathcal{H}_2 норма может быть вычислена с помощью матриц, являющихся аналогом матриц Ляпунова для систем с запаздываниями. Авторами рассмотрена система, входной и выходной сигналы которой не имеют запаздываний. В данной работе рассматриваются экспоненциально устойчивые линейные динамические системы, содержащие запаздывания во входном и выходном сигналах.

2. Постановка задачи и основные определения. Рассмотрим экспоненциально устойчивую линейную стационарную систему уравнений с запаздываниями нейтрального типа

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{j=0}^m D_j x(t - jh) \right) = \sum_{j=0}^m A_j x(t - jh) + \sum_{j=0}^m B_j v(t - jh), \quad (1)$$

$$y(t) = \sum_{j=0}^m C_j x(t - jh), \quad (2)$$

где $D_0 = E; D_1, \dots, D_m; A_0, \dots, A_m; B_0, \dots, B_m; C_0, \dots, C_m \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — вещественные матрицы, $h > 0$ — положительное запаздывание. Будем полагать, что $\sum_{j=0}^m D_j x(t-jh)$ непрерывна по $t > 0$, функция $v(t)$ ограничена.

Для того, чтобы определить решение системы (1), необходимо задать начальную функцию $\varphi \in \mathcal{C}^1$ такую, что

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-mh, 0].$$

Соответствующее решение начальной задачи будем обозначать $x(t, \varphi)$.

Определение 1 [1]. Система (1) называется экспоненциально устойчивой, если при $v(t) \equiv 0$ существуют $\gamma \geq 1$ и $\alpha > 0$ такие, что все решения системы удовлетворяет оценке

$$\|x(t, \varphi)\| \leq \gamma e^{-\alpha t} \|\varphi\|_h, \quad t \geq 0.$$

Определение 2 [1]. Фундаментальной матрицей системы (1) называется матричная функция $K(t)$, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{j=0}^m K(t-jh) D_j \right) = \sum_{j=0}^m K(t-jh) A_j$$

с начальными условиями

$$K(0) = E, \quad K(\theta) = \mathbb{O}_{n \times n}, \quad \theta < 0.$$

3. Матрицы Ляпунова. Теория матриц Ляпунова имеет множество областей применения помимо классического исследования устойчивости системы. Одной из них является нахождение нормы передаточной матрицы.

Определение 3. Матрицей Ляпунова $U(\tau, W)$, ассоциированной с произвольной матрицей W , будем называть

$$U(\tau, W) = \int_0^\infty K^T(t) W K(t + \tau) dt. \quad (3)$$

Вычисление матриц Ляпунова по формуле (3) затруднено из-за несобственного интеграла. Однако, их можно определить по-другому.

Определение 4. Будем называть матрицей Ляпунова $U(\tau, W)$, ассоциированной с произвольной квадратной матрицей W , матричную функцию, удовлетворяющую следующим свойствам:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\sum_{k=0}^m U(\tau - kh, W) D_k \right) = \sum_{k=0}^m U(\tau - kh, W) A_k, \quad \tau \geq 0, \quad (4)$$

$$U(-\tau, W) = U^T(\tau, W^T), \quad \tau \geq 0, \quad (5)$$

$$\sum_{j,k=0}^m [A_j^T U((j-k)h, W) D_k + D_j^T U((j-k)h, W) A_k] = -W. \quad (6)$$

Можно показать, что для экспоненциально устойчивых системы эти определения равносильны.

Лемма 1. Матрица Ляпунова (3) является единственным решением системы (4), удовлетворяющим (5) и (6).

4. Норма передаточной матрицы. Пусть функции $\hat{X}(s)$, $\hat{K}(s)$, $\hat{V}(s)$, $\hat{Y}(s)$ являются образами Лапласа состояния, фундаментальной матрицы, входного и выходного сигналов системы соответственно.

Определение 5 [3]. Передаточной матрицей системы (1), (2) называется матричная функция комплексной переменной $G(s)$, удовлетворяющая соотношению

$$\hat{Y}(s) = G(s) \hat{V}(s).$$

Лемма 2. Передаточная матрица системы (1), (2) имеет вид

$$G(s) = \left(\sum_{j=0}^m B_j e^{-jhs} \right) \hat{K}(s) \left(\sum_{j=0}^m C_j e^{-jhs} \right).$$

Определение 6 [3]. Прообраз Лапласа передаточной матрицы системы (1), (2) называется импульсной характеристикой $g(t)$.

Лемма 3. Импульсная характеристика системы (1), (2) имеет вид

$$g(t) = \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^m C_j K(t - (j+k)h) B_k.$$

Определение 7 [3]. \mathcal{H}_2 нормой передаточной матрицы экспоненциально устойчивой системы (1), (2) называется

$$\|G\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr}(G^*(i\omega)G(i\omega)) d\omega.$$

Теорема 1. \mathcal{H}_2 норма передаточной матрицы экспоненциально устойчивой системы (1), (2) может быть вычислена по формуле

$$\|G\|_2^2 = \text{Tr} \left(\sum_{j,r=0}^m B_j^T U((j-r)h, W_0) B_r \right) + 2\text{Tr} \left(\sum_{j,r=0}^m B_j^T \sum_{p=1}^m U((j-r+p)h, W_p) B_r \right), \quad (7)$$

$$W_0 = \sum_{k=0}^m C_k^T C_k, \quad W_p = \sum_{\substack{k=0, \dots, m-p \\ l=k+p, \dots, m \\ l-k=p}} C_k^T C_l, \quad p = 1, \dots, m.$$

В формулу (7) входят только матричные коэффициенты исходной системы (1), (2) и значения матриц Ляпунова в точках $-mh, \dots, 2mh$. Таким образом, вычисление нормы передаточной матрицы сводится к нахождению матриц Ляпунова.

5. Вычисление матриц Ляпунова. Используем определение 4 для вычисления матриц Ляпунова, необходимых для формулы (7). Введем на промежутке $\tau \in [0, h]$ вспомогательные матрицы

$$Z_j(\tau) = U(\tau + jh, W), \quad j = -m, \dots, m-1,$$

и матрицу размерности $(n \times 2mn)$

$$Z(\tau) = (Z_{m-1}(\tau), \dots, Z_0(\tau), Z_{-1}(\tau), \dots, Z_{-m}(\tau)).$$

Пусть $z(\tau)$ — вектор длины $2mn^2$, являющийся векторизацией матрицы $Z(\tau)$

$$z(\tau) = \text{vec}(Z(\tau)).$$

Теорема 2. Вектор $z(\tau)$ на промежутке $[0, h]$ может быть найден с помощью формулы

$$z(\tau) = e^{R_0^{-1} R_1 \tau} \left(M + N e^{R_0^{-1} R_1 h} \right)^{-1} (-w, 0, \dots, 0)^T, \quad (8)$$

где матрицы имеют вид

$$R_0 = \begin{pmatrix} E \times E & \cdots & E \times D_{m-1} & E \times D_m & \cdots & \mathbb{O} \times \mathbb{O} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} \times \mathbb{O} & \cdots & E \times E & E \times D_1 & \cdots & E \times D_m \\ D_m^T \times E & \cdots & D_1^T \times E & E \times E & \cdots & \mathbb{O} \times \mathbb{O} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} \times \mathbb{O} & \cdots & D_m^T \times E & D_{m-1}^T \times E & \cdots & E \times E \end{pmatrix},$$

$$R_1 = \begin{pmatrix} E \times A_0 & \cdots & E \times A_{m-1} & E \times A_m & \cdots & \mathbb{O} \times \mathbb{O} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} \times \mathbb{O} & \cdots & E \times A_0 & E \times A_1 & \cdots & E \times A_m \\ -A_m^T \times E & \cdots & -A_1^T \times E & -A_0^T \times E & \cdots & \mathbb{O} \times \mathbb{O} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} \times \mathbb{O} & \cdots & -A_m^T \times E & -A_{m-1}^T \times E & \cdots & -A_0^T \times E \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & P_0 & \cdots & P_{m-1} & P_m \\ E \times E & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbb{O} & \cdots & E \times E & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & E \times E & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & E \times E & \mathbb{O} \end{pmatrix},$$

$$N = \begin{pmatrix} Q_m & Q_{m-1} & \cdots & Q_0 & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & -E \times E & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & -E \times E & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & -E \times E & \cdots & \mathbb{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & -E \times E \end{pmatrix},$$

где $w = \text{vec}(W)$,

$$P_0 = \sum_{j=0}^m (D_j^T \times A_j), \quad P_j = \sum_{\substack{k,l=0 \\ l-k=j}}^m (A_k^T \times D_l + D_k^T \times A_l), \quad j = 1, \dots, m,$$

$$Q_0 = \sum_{j=0}^m (A_j^T \times D_j), \quad Q_j = \sum_{\substack{k,l=0 \\ k-l=j}}^m (A_k^T \times D_l + D_k^T \times A_l), \quad j = 1, \dots, m.$$

Операция « \times » обозначает прямое произведение $A \times B = (B^T \otimes A)$.

Выражение (8) позволяет найти значения функции Ляпунова $U(\tau, W)$ на промежутке $[-mh, mh]$. Чтобы продолжить решение на весь требуемый отрезок $[-mh, 2mh]$, можно воспользоваться системой (4) и методом интегрирования по шагам.

6. Заключение. В данной работе рассмотрен вопрос нахождения явной формулы для вычисления \mathcal{H}_2 нормы передаточной матрицы линейной стационарной системы дифференциальных уравнений с запаздываниями нейтрального типа.

Результат аналогичен ранее полученным как для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, так и для систем с запаздываниями. Выражение для нормы включает в себя только коэффициенты исходной системы и значения матриц Ляпунова в нескольких точках.

Также в работе представлен способ вычисления матриц Ляпунова, заключающийся в решении систем уравнений, что полностью определяет выражение для нормы.

Литература

1. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.
2. Jarlebring E., Vanbierviet J., Michiels W. Explicit expression for the \mathcal{H}_2 norm of time-delay system based on the delay Lyapunov equation // Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control. Atlanta. USA, 2010. P. 164–169.
3. Zhou K., Doyle J. C., Glover K. Robust and optimal control. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1996. 586 p.

Удот М. В.

Санкт-Петербургский государственный университет

О точке Лемуана — Гребе¹

Рекомендовано к публикации доцентом Тамасяном Г. Ш.

1. Постановка задачи. Пусть задан треугольник. Требуется найти такую точку на плоскости, для которой сумма квадратов расстояний до сторон треугольника минимальна (задача Хоссарда [1]). Такая точка является одной из замечательных точек треугольника и называется точкой Лемуана — Гребе.

2. Историческая справка. Впервые точку Лемуана обнаружил (1809) швейцарский геометр и тополог Симон Антуан Жан Люилье. Этой точке было посвящено исследование (1847) Эрнста Вильгельма Гребе, в честь которого в Германии она называлась точкой Гребе, но более распространенное название она получила в честь французского геометра Эмиля Лемуана, опубликовавшего доказательство существования этой точки (1873) [2–4].

3. Геометрическое решение. Приведем несколько определений и фактов, известных из геометрии [3, 5].

Определение. Симедианы треугольника — это прямые, симметричные его медианам относительно соответствующих биссектрис (точнее, отрезки этих прямых).

Определение. Чевиана — отрезок (или продолжение отрезка), соединяющий вершину треугольника с точкой на противоположной ей стороне или на её продолжении.

Определение. Симедиана — чевиана треугольника, луч которой симметричен лучу медианы относительно биссектрисы угла, проведенной из той же вершины.

Определение. Симедианы треугольника пересекаются в одной точке, которая называется точкой Лемуана — Гребе.

Определение. Центроид треугольника — это точка пересечения его медиан.

Определение. Проекция некоторой точки, лежащей в плоскости треугольника, на стороны треугольника (или их продолжения),

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 12-01-00752

вообще говоря, образуют треугольник. Он называется педальным треугольником этой точки.

Утверждение 1. Сумма квадратов расстояний от точки плоскости до сторон треугольника минимальна, когда эта точка является точкой Лемуана — Гребе.

Утверждение 2. Расстояния от точки Лемуана — Гребе до сторон треугольника пропорциональны длинам сторон.

Утверждение 3. Точка Лемуана — Гребе является центроидом своего педального треугольника, и других точек с этим свойством не существует.

В следующих пунктах будут доказаны первые два утверждения.

4. Доказательство утверждения 1. Заметим, что декартову прямоугольную систему координат можно задать так, чтобы одна из вершин треугольника располагалась в начале координат и сторона с наибольшей длиной лежала на оси абсцисс, причём вся фигура находится в первом октанте. Тогда вершины треугольника будут иметь координаты $(0, 0)$, (x_2, y_2) , $(x_3, 0)$ и удовлетворять следующим неравенствам

$$y_2 > 0, \quad x_3 > 0, \quad x_2 < x_3. \quad (1)$$

Найдём уравнения прямых, проходящих через стороны треугольника, а также выражения для расстояний от произвольной точки на плоскости до соответствующей прямой.

1. Уравнение первой прямой: $y_2x - x_2y = 0$. Расстояние от точки с координатами (x, y) до этой прямой задаётся выражением

$$d_1 = \frac{1}{\sqrt{y_2^2 + x_2^2}} |y_2x - x_2y|. \quad (2)$$

2. Уравнение второй прямой: $-y_2x + (x_2 - x_3)y + x_3y_2 = 0$. Расстояние d_2 до этой прямой находим по формуле

$$d_2 = \frac{1}{\sqrt{y_2^2 + (x_2 - x_3)^2}} | -y_2x + (x_2 - x_3)y + x_3y_2 |. \quad (3)$$

3. Уравнение третьей прямой: $y = 0$. Расстояние до этой прямой находим по формуле

$$d_3 = |y|. \quad (4)$$

Обозначим через D_1, D_2, D_3 — длины сторон треугольника, тогда

$$D_1 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}, \quad D_2 = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + y_2^2}, \quad D_3 = x_3. \quad (5)$$

Исследуем функцию $f(x, y)$ на экстремум, где

$$\begin{aligned} f(x, y) &= d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = \\ &= \frac{1}{y_2^2 + x_2^2} (y_2x - x_2y)^2 + \frac{1}{y_2^2 + (x_3 - x_2)^2} (y_2x + (x_3 - x_2)y - x_3y_2)^2 + y^2. \end{aligned}$$

Выпишем необходимые условия экстремума гладкой функции $f(x, y)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2y_2}{D_1^2} (y_2x - x_2y) + \frac{2y_2}{D_2^2} (y_2x + (x_3 - x_2)y - x_3y_2) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2x_2}{D_1^2} (y_2x - x_2y) + \\ \quad + \frac{2(x_3 - x_2)}{D_2^2} (y_2x + (x_3 - x_2)y - x_3y_2) + 2y = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Обозначим через $K_1 = \frac{1}{D_1^2}$, $K_2 = \frac{1}{D_2^2}$. С учетом неравенств (1) и введенных обозначений приведем систему (6) к виду системы линейных алгебраических уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} (K_1 + K_2) y_2x + (K_2(x_3 - x_2) - K_1x_2) y = K_2x_3y_2, \\ (-x_2y_2K_1 + (x_3 - x_2)K_2y_2) x + \\ \quad + (x_2^2K_1 + (x_3 - x_2)^2K_2 + 1) y = K_2x_3y_2(x_3 - x_2). \end{cases} \quad (7)$$

Запишем эту систему в матричном виде $Ax = b$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= (K_1 + K_2) y_2, & a_{12} &= K_2(x_3 - x_2) - K_1x_2, \\ a_{21} &= -x_2y_2K_1 + (x_3 - x_2)K_2y_2, \\ a_{22} &= x_2^2K_1 + (x_3 - x_2)^2K_2 + 1. \end{aligned} \quad (8)$$

Из этих равенств видно, что $a_{21} = y_2 a_{12}$. С учетом (8) найдём

$$\begin{aligned} \det A = a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12} = & x_2^2 y_2 K_1 (K_1 + K_2) + \\ & + (x_3 - x_2)^2 y_2 K_2 (K_1 + K_2) + y_2 (K_1 + K_2) - \\ & - y_2 (x_3 - x_2)^2 K_2^2 + 2x_2 y_2 K_1 K_2 (x_3 - x_2) - y_2 x_2^2 K_1^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Несложно показать, что $\det A > 0$. Поэтому система (7) имеет единственное решение (подозрительную точку на экстремум)

$$\begin{cases} x = \frac{x_3 x_2^2 + x_3 y_2^2 + x_2 x_3^2}{2(y_2^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_3 x_2)}, \\ y = \frac{x_3^2 y_2}{2(y_2^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_3 x_2)}. \end{cases} \quad (10)$$

С учетом (5) перепишем эти соотношения в эквивалентном виде

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} D_3 \frac{3D_1^2 + D_3^2 - D_2^2}{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2}, \\ y = \frac{1}{2} D_3 \frac{S}{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2}, \end{cases} \quad (11)$$

здесь $S = \frac{1}{2} y_2 x_3 = \sqrt{p(p - D_1)(p - D_2)(p - D_3)}$ — площадь рассматриваемого треугольника, p — полупериметр.

Для окончательного решения задачи необходимо проверить выполнение достаточного условия минимума для функции $f(x, y)$. Для этого запишем матрицу Гессе H , используя обозначения (8):

$$H = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}.$$

В данном случае достаточное условие минимума имеет вид

$$\begin{cases} a_{11} > 0, \\ a_{11} a_{22} > 0. \end{cases}$$

Оба этих условия очевидно выполняются, поэтому точка с координатами (10) (или (11)) является решением поставленной задачи.

Утверждение 1 доказано.

5. Доказательство утверждения 2. Заметим, что при задании прямых вектор нормали выбирался таким образом, чтобы он был направлен внутрь треугольника. Подставив точку (10) (или (11)) в уравнение каждой прямой, получим положительное число, следовательно, эта точка внутренняя.

Воспользовавшись данным свойством точки (10) (или (11)) рассмотрим следующие соотношения (см. (2)–(4)):

$$\begin{aligned} \frac{d_1}{D_1} &= \frac{1}{x_2^2 + y_2^2} |y_2x - x_2y|, \\ \frac{d_2}{D_2} &= \frac{1}{y_2^2 + (x_2 - x_3)^2} |-y_2x + (x_2 - x_3)y + x_3y_2|, \\ \frac{d_3}{D_3} &= \frac{|y|}{x_3}. \end{aligned}$$

Для всех внутренних точек треугольника модули раскрываются с положительным знаком, поэтому

$$\begin{aligned} \frac{d_1}{D_1} &= \frac{1}{x_2^2 + y_2^2} (y_2x - x_2y), \\ \frac{d_2}{D_2} &= \frac{1}{y_2^2 + (x_2 - x_3)^2} (-y_2x + (x_2 - x_3)y + x_3y_2), \\ \frac{d_3}{D_3} &= \frac{y}{x_3}. \end{aligned}$$

Тогда система (6) примет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2y_2 \frac{d_1}{D_1} - 2y_2 \frac{d_2}{D_2} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -2x_2 \frac{d_1}{D_1} + 2(x_2 - x_3) \frac{d_2}{D_2} + 2x_3 \frac{d_3}{D_3} = 0. \end{cases}$$

После преобразований получим

$$\begin{cases} y_2 \left(\frac{d_1}{D_1} - \frac{d_2}{D_2} \right) = 0, \\ x_2 \left(\frac{d_2}{D_2} - \frac{d_1}{D_1} \right) + x_3 \left(\frac{d_3}{D_3} - \frac{d_2}{D_2} \right) = 0. \end{cases}$$

Отсюда в силу (1) имеем [1, 3, 6]

$$\frac{d_1}{D_1} = \frac{d_2}{D_2} = \frac{d_3}{D_3}.$$

Утверждение 2 доказано.

Замечание. Во всех рассмотренных нами источниках нигде не найдено аналитического представления (10) (или (11)) точки Лемуана — Гребе.

6. Заключение. В данной работе рассмотрена задача о поиске такой точки на плоскости, для которой сумма квадратов расстояний до сторон заданного треугольника минимальна. Представлен аналитический способ нахождения точки Лемуана — Гребе из решения экстремальной задачи.

Литература

1. Ефремов Д. Д. Новая геометрия треугольника. Одесса: Типография бланкоиздательства Шпенцера М., 1902. 351 с.
2. Mackay J.S. Early History of the Symmedian Point // Proc. Edinburgh Math. Soc., 1892–1893. No 11. P. 92–103.
3. Вычисление расстояний между геометрическими объектами. <http://pmu.ru/vf4/algebra2/optimiz/distance>
4. Точка Лемуана. http://ru.wikipedia.org/wiki/Точка_Лемуана
5. Зетель С. И. Задачи на максимум и минимум. М.-Л.: Гостехиздат, 1948. 224 с.
6. D’Ocagne M. Sur un élément du triangle rectiligne // Nouvelles annales de mathématiques, journal des candidats aux écoles polytechnique et normale, 1983. No 3, 2. P. 450–464.

Утешев Н. А.

Санкт-Петербургский государственный университет

Аппроксимация точечно-множественных отображений алгебраическими полиномами¹

Рекомендовано к публикации профессором Демьяновым В. Ф.

В настоящей работе рассматривается задача чебышевской аппроксимации точечно-множественного отображения полиномами. Классическое условие существования чебышевского альтернанса, описывающее приближение функции полиномами, обобщается на случай точечно-множественного отображения. Показано, что при этом чередуются не только знаки отклонений полинома наилучшего приближения от точечно-множественного отображения, но и границы отображения (верхняя или нижняя), от которых эти отклонения вычисляются.

Пусть на замкнутом ограниченном множестве $G \subset \mathbb{R}$ задано точечно-множественное отображение (далее ТМО) $M: M(t) \subset \mathbb{R}$, где множества $M(t)$ ограничены в совокупности на G . Рассмотрим задачу аппроксимации этого отображения полиномом $P(A, t)$ степени n : $P(A, t) = \sum_{j=0}^n a_j t^j = (A, B(t))$. Здесь $A = (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $B(t) = (1, t, \dots, t^n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Положим

$$\rho(A, t) = \sup_{x \in M(t)} |x - P(A, t)|.$$

Требуется найти

$$\inf_{A \in \mathbb{R}^n} \sup_{t \in G} \rho(A, t).$$

Построим функции $\varphi_1(t) = \inf_{x \in M(t)} x$, $\varphi_2(t) = \sup_{x \in M(t)} x$. Предположим, что $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ – непрерывные на G функции. Введем обозначения

$$\eta_i(A, t) = \frac{1}{2}(P(A, t) - \varphi_i(t))^2, \quad i = 1, 2,$$

$$F_i(A) = \max_{t \in G} \eta_i(A, t), \quad i = 1, 2; \quad F(A) = \max\{F_1(A), F_2(A)\}.$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 12-01-00752

Тогда поставленная выше задача эквивалентна задаче минимизации на \mathbb{R}^{n+1} функционала $F(A)$. Задача аппроксимации ТМО с помощью полинома впервые была рассмотрена Е. Я. Ремезом [1].

Функции $\eta_i(t)$ выпуклы по A при любом t . Поэтому функции $F_1(A)$, $F_2(A)$ и $F(A)$ также будут выпуклыми как функции максимума выпуклых функций. Необходимое условие минимума функционала $F(A)$ в этом случае выглядит так: $\mathbb{O}_{n+1} \in \partial F(A)$, где $\partial F(A)$ — субдифференциал выпуклой функции F в точке A .

Используя правила субдифференциального исчисления (см. [2]), найдем субдифференциал функционала $F(A)$:

$$\begin{aligned} \partial \eta_i(t) &= \{(P(A, t) - \varphi_i(t))B(t)\}, \\ \partial F_i(A) &= \text{co}\{(P(A, t) - \varphi_i(t))B(t) | \eta_i(t) = F_i\}, \\ \partial F(A) &= \begin{cases} \text{co}\{(P(A, t) - \varphi_i(t))B(t) | \eta_i(t) = F_i\}, \\ \text{если } F_i(A) > F_{3-i}(A), \\ \text{co}\{\text{co}\{(P(A, t) - \varphi_i(t))B(t) | \eta_i(t) = F_i\} | i = 1, 2\}, \\ \text{если } F_1(A) = F_2(A). \end{cases} \end{aligned}$$

Упрощая полученное выражение, получаем

$$\partial F(A) = \text{co}\{(P(A, t) - \varphi_i(t))B(t) | \eta_i(t) = F(A), i = 1, 2\}. \quad (1)$$

Размерность векторов $B(t)$ равна $n + 1$. Если в точке A выполнено необходимое условие минимума, то согласно теореме Каратеодори \mathbb{O}_{n+1} будет выпуклой комбинацией r векторов вида

$$\begin{aligned} \mathbb{O}_{n+1} &= \sum_{k=1}^r \alpha_k (P(A, t_k) - \varphi_i(t_k))B(t_k), \\ \alpha_k &\in [0, 1], \quad \eta_i(t_k) = F(A), \quad r \leq n + 2. \end{aligned} \quad (2)$$

Если $\varphi_1(t) = \varphi_2(t) \forall t \in G$ и значения этих функций совпадают со значениями некоторого полинома порядка не выше n , то $F(A) = 0$. В противном случае можно поделить это выражение на $\sqrt{2F(A)}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{O}_{n+1} &= \sum_{k=1}^r \alpha_k \text{sign}(P(A, t_k) - \varphi_i(t_k))B(t_k), \\ \alpha_k &\in [0, 1], \quad \sum_{k=1}^r \alpha_k = 1, \quad \eta_i(t_k) = F(A), \quad r \leq n + 2. \end{aligned} \quad (3)$$

Рассмотрим случай, когда все t_k попарно различны. Если $r < n+2$, то $B(t_k)$ будут линейно независимы и необходимое условие минимума не может быть выполнено. Поэтому $r = n + 2$ и все $\alpha_k > 0$. Не умаляя общности, считаем все t_k упорядоченными по возрастанию, а через $i(t_k)$ обозначим соответствующие им при вычислении функции $\text{sign}(\cdot)$ номера i . Для вычисления величин α_k представим условие минимума в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\alpha_k}{\alpha_{n+2}} \text{sign}(P(A, t_k) - \varphi_{i(t_k)})B(t_k) = \\ = -\text{sign}(P(A, t_{n+2}) - \varphi_{i(t_{n+2})})B(t_{n+2}). \end{aligned} \quad (4)$$

Если необходимое условие минимума выполняется, то найдутся t_k , при которых данное уравнение будет иметь положительное решение, и обратно: если у этого уравнения найдется положительное решение, то необходимое условие минимума будет выполняться. Последнее следует из того, что коэффициенты α_k могут быть получены из положительного решения уравнения $\{\gamma_k | k = \overline{1, n+1}\}$ по формулам

$$\alpha_k = \frac{\gamma_k}{\sum_{j=1}^{n+1} \gamma_j + 1}, \quad \alpha_{n+2} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n+1} \gamma_j + 1}.$$

Вычислим решение уравнения (4) по формуле Крамера. Имеем

$$\frac{\alpha_k}{\alpha_{n+2}} = \frac{\tilde{\Delta}_k}{\Delta},$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_k &= \det([\text{cat}_{j=1}^{k-1} \text{sign}(P(A, t_j) - \varphi_{i(t_j)})B(t_j), \\ &\quad - \text{sign}(P(A, t_{n+2}) - \varphi_{i(t_{n+2})})B(t_{n+2}), \\ &\quad \text{cat}_{j=k+1}^{n+1} \text{sign}(P(A, t_j) - \varphi_{i(t_j)})B(t_j)]) = \\ &= (-1)^{n-k} \prod_{j=1, j \neq k}^{n+2} \text{sign}(P(A, t_j) - \varphi_{i(t_j)}) \det(\text{cat}_{j=1, j \neq k}^{n+2} B(t_j)), \quad (5) \\ \Delta &= \det(\text{cat}_{j=1}^{n+1} \text{sign}(P(A, t_j) - \varphi_{i(t_j)})B(t_j)). \end{aligned}$$

Под $\text{cat}_{l \in L} A_l$ здесь понимается горизонтальную конкатенацию ряда матриц A_l . Введём обозначение

$$\Delta_k = \det(\text{cat}_{j=1, j \neq k}^{n+1} \text{sign}(P(A, t_j) - \varphi_{i(t_j)})B(t_j)), \quad k \in \overline{1, n+2}.$$

Все Δ_k положительны как определители Вандермонда. Так как дробь α_k/α_{n+2} тоже должна быть положительна, произведение

$$\begin{aligned} & (-1)^{n-k} \frac{\prod_{j=1, j \neq k}^{n+2} \text{sign}(P(A, t_j) - \varphi_{i(t_j)})}{\prod_{j=1, j \neq k}^{n+1} \text{sign}(P(A, t_j) - \varphi_{i(t_j)})} = \\ & = (-1)^{n-k} \frac{\text{sign}(P(A, t_{n+2}) - \varphi_{i(t_{n+2})})}{\text{sign}(P(A, t_k) - \varphi_{i(t_k)})} > 0. \end{aligned}$$

Таким образом получаем необходимое условие минимума:

$$\text{sign}(P(A, t_{k+1}) - \varphi_{i(t_{k+1})}) = -\text{sign}(P(A, t_k) - \varphi_{i(t_k)}), \quad k \in \overline{1, n+1}.$$

Это условие будет и достаточным условием минимума, так как \mathbb{O}_{n+1} будет лежать внутри выпуклой оболочки точек из (1) в силу положительности всех коэффициентов α_k . (Это полностью аналогично условию чебышевского альтернанса из [3]). Найдём теперь условия для $i(t_k)$. Допустим $i(t_k) = 1$. Если $P(A, t_k) < \varphi_1(t_k)$, то

$$\eta_2(t) = \frac{1}{2}(P(A, t) - \varphi_2(t))^2 > \frac{1}{2}(P(A, t) - \varphi_1(t))^2 = \eta_1(t) = F(A).$$

Это противоречит определению $F(A)$. Поэтому $P(A, t_k) > \varphi_1(t_k)$. Аналогичным образом доказываем, что при $i(t_k) = 2$ будет $P(A, t_k) < \varphi_2(t_k)$. А поскольку $\text{sign}(P(A, t_k) - \varphi_{i(t_k)})$ чередуются, то такое же чередование будет иметь место и для индексов:

$$\forall k \in \overline{1, n+1}, \quad i(t_k) = 3 - i(t_{k+1}).$$

Так же будет обстоять дело и в случае, когда среди точек t_k есть совпадающие, но в них выполняется соотношение $(P(A, t_k) - \varphi_1(t_k))(P(A, t_k) - \varphi_2(t_k)) > 0$. Такая ситуация возможна только в том случае, если в этой точке $\varphi_1(t_k) = \varphi_2(t_k)$.

Рассмотрим теперь случай, когда некая точка t_k повторяется дважды, но $(P(A, t_k) - \varphi_1(t_k))(P(A, t_k) - \varphi_2(t_k)) < 0$. Учитывая,

что $\eta_1(t_k) = \eta_2(t_k)$, путём несложных преобразований получаем $P(A, t_k) = \frac{\varphi_1(t_k) + \varphi_2(t_k)}{2}$. Необходимое условие минимума здесь выполняется, и A действительно является точкой минимума:

$$\begin{aligned} F(A) = \eta_1(t_k) &= \frac{1}{2} \frac{(\varphi_2(t_k) - \varphi_1(t_k))^2}{4} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{(\varphi_2(t_k) - P(A^*, t_k) + P(A^*, t_k) - \varphi_1(t_k))^2}{4} \leq \\ &\leq \frac{(\varphi_2(t_k) - P(A^*, t_k))^2 + (P(A^*, t_k) - \varphi_1(t_k))^2}{4} \leq F(A^*). \quad (6) \end{aligned}$$

В этом случае $\{t_k\} = \operatorname{argmax}(\varphi_2 - \varphi_1)$, а весь полином лежит в полосе $[\varphi_2(t) - h, \varphi_1(t) + h]$, где $h = \max_{t \in G} \frac{\varphi_2(t) - \varphi_1(t)}{2}$. Эта полоса имеет переменную ширину, равную нулю в точках $\{t_k\}$. Возможность построения такого полинома требует дополнительного исследования.

Литература

1. Ремез Е. Я. Основы численных методов чебышевского приближения. Киев.: Наукова думка, 1969. 624 с.
2. Демьянов В. Ф., Васильев Л. В. Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981. 384 с.
3. Демьянов В. Ф., Малозёмов Л. В. Введение в минимакс. М.: Наука, 1972. 368 с.

Фальков Е. А.

Санкт-Петербургский государственный университет

**Об одном методе решения задачи управления
по части переменных с ограничением на
неконтролируемые переменные**

Рекомендовано к публикации профессором Квитко А. Н.

1. Введение. Предлагается алгоритм построения синтезирующего управления, гарантирующего перевод нелинейных стационарных систем из начала координат в его окрестность по отношению к части переменных с учетом ограничения на неконтролируемые переменные. Приводится конструктивный критерий, гарантирующий реализацию полученного алгоритма.

2. Постановка задачи. Объектом исследования является система

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (1)$$

где $x = (y, z)$, $x \in R^n$, $y \in R^m$, $z \in R^p$, $m > 0$, $p \geq 0$, $m + p = n$, $u \in R^r$, $r \leq n$, $t \in [0, 1]$.

Предполагаем выполнение следующих условий

$$f \in C^2(D \times R^r, R^n), \quad f = (f_1, \dots, f_n), \quad (2)$$

$$D = \{(y, z) \in R^n : \|y\| \leq H, \|z\| < \infty\},$$

$$f(0, 0) = 0, \quad (3)$$

$$\|y\| < C_1, \quad \|z\| < C_1, \quad \|u\| < C_2, \quad (4)$$

Пусть заданы состояния

$$x(0) = 0, \quad y(1) = y_1, \quad y_1 = (y_1^1, \dots, y_1^m), \quad \|y_1\| \leq C_1. \quad (5)$$

Задача. Найти функции $x(t) \in C^1[0, 1]$, $u(t) \in C^1[0, 1]$, удовлетворяющие системе (1) и условию (4) так, чтобы были выполнены соотношения

$$x(0) = 0, \quad y(t) \rightarrow y_1 \quad \text{при} \quad t \rightarrow 1. \quad (6)$$

Указанную пару будем называть программным движением.

3. Решение задачи. Выберем некоторые векторы $u_1 \in R^r$, $\|u_1\| < C_2$, и $z_1 \in R^p$, $\|z_1\| < C_1$. Используя (2), систему (1) запишем в виде

$$\begin{cases} \dot{y} = P_1(y - y_1) + P_2(z - z_1) + Q_1(u - u_1) + R_{1y} + R_{2y}, \\ \dot{z} = P_3(y - y_1) + P_4(z - z_1) + Q_2(u - u_1) + R_{1z} + R_{2z}, \end{cases}$$

где матрицы системы имеют вид

$$\begin{aligned} P_1 &= \left\{ \frac{\partial f^i}{\partial y^j}(y_1, z_1, u_1) \right\}_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,m}}}, & P_2 &= \left\{ \frac{\partial f^i}{\partial z^j}(y_1, z_1, u_1) \right\}_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,p}}}, \\ P_3 &= \left\{ \frac{\partial f^i}{\partial y^j}(y_1, z_1, u_1) \right\}_{\substack{i=\overline{m+1,n} \\ j=\overline{1,m}}}, & P_4 &= \left\{ \frac{\partial f^i}{\partial z^j}(y_1, z_1, u_1) \right\}_{\substack{i=\overline{m+1,n} \\ j=\overline{1,p}}}, \\ Q_1 &= \left\{ \frac{\partial f^i}{\partial u^j}(y_1, z_1, u_1) \right\}_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,r}}}, & Q_2 &= \left\{ \frac{\partial f^i}{\partial u^j}(y_1, z_1, u_1) \right\}_{\substack{i=\overline{m+1,n} \\ j=\overline{1,r}}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{1y}^k &= \frac{1}{2}(y - y_1)^T \frac{\partial^2 f^k}{\partial y^2}(\tilde{x}, \tilde{u})(y - y_1) + \frac{1}{2}(y - y_1)^T \frac{\partial^2 f^k}{\partial y \partial z}(\tilde{x}, \tilde{u})(z - z_1) + \\ &+ \frac{1}{2}(z - z_1)^T \frac{\partial^2 f^k}{\partial z^2}(\tilde{x}, \tilde{u})(z - z_1) + \frac{1}{2}(y - y_1)^T \frac{\partial^2 f^k}{\partial y \partial u}(\tilde{x}, \tilde{u})(u - u_1) + \\ &+ \frac{1}{2}(z - z_1)^T \frac{\partial^2 f^k}{\partial z \partial u}(\tilde{x}, \tilde{u})(u - u_1) + \frac{1}{2}(u - u_1)^T \frac{\partial^2 f^k}{\partial u^2}(\tilde{x}, \tilde{u})(u - u_1), \\ R_{2y}^k &= f^k(y_1, z_1, u_1), \quad k = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= (\tilde{y}, \tilde{z}), \\ \tilde{y} &= y_1 + \theta_k(y - y_1), \quad \tilde{z} = z_1 + \theta_k(z - z_1), \quad \tilde{u} = u_1 + \theta_k(u - u_1), \\ \theta_k &\in (0, 1), \quad \|\tilde{y}\| < C_1, \quad \|\tilde{z}\| < C_1, \quad \|\tilde{u}\| < C_2. \end{aligned}$$

Аналогичные выражения выписываются для R_{1z}^l , R_{2z}^l , $l = \overline{m+1, n}$.

Будем искать решение поставленной задачи в виде

$$y(t) = a_1(t) + y_1, \quad z(t) = a_2(t) + z_1, \quad u(t) = b(t) + u_1. \quad (7)$$

$$\begin{cases} \dot{a}_1 = P_1 a_1 + P_2 a_2 + Q_1 b + R_{1a_1}(a_1, a_2, b) + R_{2y}(y_1, z_1, u_1), \\ \dot{a}_2 = P_3 a_1 + P_4 a_2 + Q_2 b + R_{1a_2}(a_1, a_2, b) + R_{2z}(y_1, z_1, u_1), \end{cases} \quad (8)$$

Условия (4), (6) примут вид

$$\|a_1(t) + y_1\| < C_1, \quad \|a_2(t) + z_1\| < C_1, \quad \|b(t) + u_1\| < C_2, \quad (9)$$

$$t \in [0, 1], \quad a_1(0) = -y_1, \quad a_2(0) = -z_1, \quad b(0) = -u_1. \quad (10)$$

Сделаем преобразование переменной t по формуле

$$1 - t = e^{-\alpha\tau}, \quad \alpha > 0, \quad \tau \in [0, \infty), \quad (11)$$

Тогда систему (8) и условия (9), (10) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \alpha e^{-\alpha\tau} \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \alpha e^{-\alpha\tau} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} d + \\ + \alpha e^{-\alpha\tau} \begin{pmatrix} R_{1c_1} \\ R_{1c_2} \end{pmatrix} + \alpha e^{-\alpha\tau} \begin{pmatrix} R_{2c_1} \\ R_{2c_2} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$c_1(\tau) = a_1(t(\tau)), \quad c_2(\tau) = a_2(t(\tau)), \quad d(\tau) = b(t(\tau)), \quad \tau \in [0, \infty),$$

$$\|c_1(\tau) + y_1\| < C_1, \quad \|c_2(\tau) + z_1\| < C_1, \quad \|d(\tau) + u_1\| < C_2, \quad (13)$$

$$c_1(0) = -y_1, \quad c_2(0) = -z_1, \quad d(0) = -u_1. \quad (14)$$

Введем новую управляющую функцию, связанную с $d(\tau)$ уравнением

$$\frac{d}{d\tau} d(\tau) = \alpha e^{-\alpha\tau} v(\tau), \quad v = (v^1, \dots, v^r), \quad v \in R. \quad (15)$$

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ d \end{pmatrix} = \alpha e^{-\alpha\tau} \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & Q_1 \\ P_3 & P_4 & Q_2 \\ \mathbf{O}_{m \times r} & \mathbf{O}_{p \times r} & \mathbf{O}_{r \times r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ d \end{pmatrix} + \\ + \alpha e^{-\alpha\tau} \begin{pmatrix} \mathbf{O}_{m \times r} \\ \mathbf{O}_{p \times r} \\ E_{r \times r} \end{pmatrix} v + \alpha e^{-\alpha\tau} \begin{pmatrix} R_{1c_1} \\ R_{1c_2} \\ \mathbf{O}_{r \times 1} \end{pmatrix} + \alpha e^{-\alpha\tau} \begin{pmatrix} R_{2c_1} \\ R_{2c_2} \\ \mathbf{O}_{r \times 1} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (16)$$

которая образована присоединением системы (15) к системе (12).

Линеаризуем систему (16) относительно вектора $c = (c_1, d, c_2)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} c_1 \\ d \\ c_2 \end{pmatrix} = \alpha e^{-\alpha\tau} \begin{pmatrix} P_1 & Q_1 & P_2 \\ \mathbf{O}_{m \times r} & \mathbf{O}_{r \times r} & \mathbf{O}_{p \times r} \\ P_3 & Q_2 & P_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ d \\ c_2 \end{pmatrix} + \\ + \alpha e^{-\alpha\tau} \begin{pmatrix} \mathbf{O}_{m \times r} \\ E_{r \times r} \\ \mathbf{O}_{p \times r} \end{pmatrix} v. \end{aligned} \quad (17)$$

Построим управляющую функцию $v(\tau) \in C[0, \infty)$ так, чтобы обеспечить экспоненциальную устойчивость системы (17) относительно групп переменных $(c_1, d) = \bar{c}$, причем необходимо

$$\|\bar{c} + \bar{c}(0)\| < C_3, \quad C_3 = \min(C_1, C_2). \quad (18)$$

Для этого, следуя [2], будем искать стабилизирующее управление в виде

$$v = \mathbf{G}c_2 + v^*, \quad (19)$$

где \mathbf{G} — постоянная матрица. Получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} c_1 \\ d \\ c_2 \end{pmatrix} &= \alpha e^{-\alpha\tau} \underbrace{\begin{pmatrix} P_1 & Q_1 & P_2 \\ \mathbf{O}_{m \times r} & \mathbf{O}_{p \times r} & \mathbf{G} \\ P_3 & Q_2 & P_4 \end{pmatrix}}_{\bar{A}(\mathbf{G})} \begin{pmatrix} c_1 \\ d \\ c_2 \end{pmatrix} + \\ &+ \alpha e^{-\alpha\tau} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{O}_{m \times r} \\ E_{r \times r} \\ \mathbf{O}_{p \times r} \end{pmatrix}}_{\bar{B}} v^*. \quad (20) \end{aligned}$$

Далее необходимо построить управление v^* , стабилизирующее специально построенную *вспомогательную систему* по всем переменным.

Размерность вспомогательной системы

$$\begin{aligned} &m + r + \text{rank} K_p(\mathbf{G}), \\ K_p(\mathbf{G}) &= \left\{ \begin{pmatrix} P_2 \\ \mathbf{G} \end{pmatrix}^T, P_4^T \begin{pmatrix} P_2 \\ \mathbf{G} \end{pmatrix}^T, \dots, (P_4^T)^{p-1} \begin{pmatrix} P_2 \\ \mathbf{G} \end{pmatrix}^T \right\}. \end{aligned}$$

Вспомогательная система имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \xi &= \alpha e^{-\alpha\tau} L_3 \bar{A}(\mathbf{G}) L_4 \xi + \alpha e^{-\alpha\tau} L_4 \bar{B} v^*, \quad (21) \\ L_3 &= \begin{pmatrix} E & O \\ O & L_1 \end{pmatrix}, \quad L_4 = \begin{pmatrix} E & O \\ O & L_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где L_3, L_4 построены на линейно независимых векторах матрицы $K_p(\mathbf{G})$, причем $L_3 L_4 = E_{h \times h}$, $h = \text{rank} K_p(\mathbf{G})$.

Матрица Калмана системы (21) имеет вид

$$\bar{K}(\mathbf{G}) = L_3 \{ \bar{B}, \bar{A}(\mathbf{G}) \bar{B}, \dots, (\bar{A}(\mathbf{G}))^{m+r+h-1} \bar{B} \}.$$

В [2] показано, что характер устойчивости (20) по отношению к (c_1, d) эквивалентен характеру устойчивости (21) по Ляпунову. Введем обозначения

$$\begin{aligned} K_p^o(\mathbf{G}, z_1) &= K_p(\mathbf{G}) \Big|_{\substack{y_1=0 \\ u_1=0}}, \quad \bar{A}^o(\mathbf{G}, z_1) = \bar{A}(\mathbf{G}) \Big|_{\substack{y_1=0 \\ u_1=0}}, \\ \bar{K}^o(\mathbf{G}, z_1) &= \bar{K}(\mathbf{G}) \Big|_{\substack{y_1=0 \\ u_1=0}}. \end{aligned}$$

Потребуем выполнения следующего условия. Пусть существуют матрица \mathbf{G}^o и вектор z_1^o такой, что $\|z_1^o\| < \varepsilon_z^1$, для которых выполняется

$$m + r + \text{rank } K_p^o(\mathbf{G}^o, z_1^o) = \text{rank } \bar{K}^o(\mathbf{G}^o, z_1^o). \quad (22)$$

Тогда существует $\varepsilon_1 > 0$ такой, что для $\|y_1\| < \varepsilon_1$, $\|u_1\| < \varepsilon_1$ верно

$$m + r + \text{rank } K_p(\mathbf{G}^o, z_1^o) = \text{rank } \bar{K}(\mathbf{G}^o, z_1^o).$$

Далее, согласно [1], для определенных \mathbf{G}^o, z_1^o и некоторых заданных y_1, u_1 , таких что $\|y_1\| < \varepsilon_1$, $\|u_1\| < \varepsilon_1$, можно построить управление v^* , стабилизирующее (20) по всем переменным

$$v^* = \tilde{S}(\tau)\xi.$$

Таким образом система (20), замкнутая управлением

$$v = \mathbf{G}c_2 + S(\tau) \begin{pmatrix} \bar{c} \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad (23)$$

где $S(\tau) = \tilde{S}(\tau)L_3$, экспоненциально устойчива относительно \bar{c} и имеет место оценка

$$\begin{aligned} \|\bar{c}(\tau)\| &\leq M_o \|c_o\| e^{-\lambda\tau}, \quad \lambda > 1, \\ c_o = c(0) &= (-y_1, -u_1, -z_1). \end{aligned}$$

Рассмотрим систему (16), замкнутую управлением (23). Эту систему можно записать в виде

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} \bar{c} \\ c_2 \end{pmatrix} = A(\tau) \begin{pmatrix} \bar{c} \\ c_2 \end{pmatrix} + \alpha e^{-\alpha\tau} R_1(\bar{c}, c_2) + \alpha e^{-\alpha\tau} R_2(\bar{c}_0), \quad (24)$$

где $\|R_1(\bar{c}, c_2)\| \leq L(\|\bar{c}\|^2 + \|c_2\|^2)$, в области $\|c + c(0)\| < C_3$,

$$\|R_2(c_o)\| \leq T_o(c_o), \quad T_o(c_o) \rightarrow 0, \quad \|c_o\| \rightarrow 0.$$

Лемма. Существует такие $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1$ и $0 < \varepsilon_z^2 < \varepsilon_z^1$, что компоненты \bar{c} решения системы (31) с вектором начальных данных $c_0 = L(-y_1, -u_1, -z_1^o)^T$, $\|y_1\| < \varepsilon_2$, $\|u_1\| < \varepsilon_2$, $\|z_1^o\| < \varepsilon_z^2$, удовлетворяют соотношениям

$$\|\bar{c}\| \leq M\|\bar{c}(\tau_1)\|e^{-\nu(\tau-\tau_1)} + M_1e^{-\alpha\tau}T_3(c_0), \quad (25)$$

$$\tau \in [\tau_1, +\infty],$$

$$\|\bar{c}\| \leq M_2\|\bar{c}(0)\| + M_3T_3(c_0), \quad (26)$$

$$\tau \in [0, \tau_1],$$

где $M > 0$, $M_1 = M_1(\tau_1) > 0$, $M_2 = M_2(\tau_1) > 0$, $\nu > 0$, $\tau_1 > 0$ есть постоянные величины.

Из оценок (25), (26) заключаем, что компоненты \bar{c} решения системы (16) с начальными данными $c_0 = L(-y_1, -u_1, -z_1^o)^T$, $\|y_1\| < \varepsilon_2$, $\|u_1\| < \varepsilon_2$, $\|z_1^o\| < \varepsilon_z^2$, начиная с некоторого момента времени $\tau_1 \geq 0$, экспоненциально стремится к нулю.

На основании изложенного приходим к выводу о том, что нами был рассмотрен алгоритм решения поставленной задачи, который можно резюмировать в виде следующей теоремы.

Теорема. Пусть для правой части системы (1) выполнены условия (2), (3), (5), (22). Тогда существует решение задачи (1), (7), которое можно найти после решения задачи стабилизации вспомогательной линейной нестационарной системы (17) по всем переменным, решения задачи Коши для системы (24) с вектором начальных данных $c_0 = L(-y_1, -u_1, -z_1^o)^T$, удовлетворяющим условию $\|y_1\| < \varepsilon_2$, $\|u_1\| < \varepsilon_2$, $\|z_1^o\| < \varepsilon_z^2$, и последующего перехода к исходным переменным по формулам (11), (7).

Литература

1. Квитко А. Н. Об одном методе решения граничной задачи управления для нелинейной управляемой системы // Журнал ВММФ, 2006. Т. 46, № 7. С. 1241–1250.
2. Воротников В. И. Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных. М.: Наука, 1991. 288 с.

Фоминых А. В.

Санкт-Петербургский государственный университет

Метод наискорейшего спуска в одной негладкой задаче оптимизации¹

Рекомендовано к публикации доцентом Карелиным В. В.

1. Введение. Одной из основных задач теории управления динамическими системами является проблема определения множеств возможных фазовых состояний системы в различные моменты времени. Эти множества, называемые множества достижимости, играют важную роль при решении задач управления, наблюдения и прогнозирования. В данной статье рассматривается задача наблюдаемости начального состояния динамической системы в следующей постановке: задано множество начальных состояний X_0 этой системы и желаемое конечное состояние $x(T)$, необходимо найти такое начальное состояние $x_0 \in X_0$, чтобы траектория системы, начинающаяся в точке x_0 , проходила как можно ближе от точки x_k .

2. Постановка задачи. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = P(t)x + g(t) \quad (1)$$

и включение

$$x_0 \in X_0, \quad (2)$$

где x — n -мерный вектор искомых функций, $P(t)$ — $(n \times n)$ -матрица, $g(t)$ — n -мерная вектор-функция, x_0 — начальное положение, X_0 — заданное множество, которое будем считать замкнутым.

В работе [1] приближённое решение задачи Коши с линейной стационарной неоднородной системой дифференциальных уравнений второго порядка с неопределённым начальным условием ищется в виде полиномов наперёд заданной степени. В данной статье используется приближённое решение, полученное уже для линейных нестационарных систем n -го порядка. Это решение представляет собой полиномы наперёд заданной степени, в которых известны все коэффициенты при степенях t , кроме свободных членов полиномов,

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 12-01-00752

которые являются начальным условием. Итак, пусть приближённое решение (1), (2) имеет вид

$$\begin{cases} x^1 = a_0^0 t^0 + a_1^0 t^1 + \dots + a_m^0 t^m, \\ \dots \\ x^n = a_0^n t^0 + a_1^n t^1 + \dots + a_m^n t^m. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь определены все коэффициенты полиномов в правой части, кроме начального условия $x_0 = a_0$, известно лишь, что оно удовлетворяет включению (2). Задача состоит в нахождении наименьшей окрестности $S(x_k, \varepsilon)$ заданной точки x_k , в которую в конечный момент времени T может попасть решение $x(x_0, t_0, t)$ системы (1) из заданной начальной области (2). Для этого рассмотрим функцию

$$\varepsilon = f(a_0) = \|x(T) - x_k\|^2. \quad (4)$$

Пусть множество

$$X_0 = [a_0 \in R^n \mid \phi_i(a_0) \leq d_i], \quad (5)$$

где $d_i \in R$ — заданные числа, $i = \overline{1, n}$. Считаем, что функции $\phi_i(a_0)$ линейны относительно a_0 , а именно, $\phi_i = \sum_{j=1}^n k_i^j a_0^j$. Можно ввести следующую штрафную функцию

$$\phi(a_0) = \max(0, \phi_1(a_0) - d_1) + \dots + \max(0, \phi_n(a_0) - d_n). \quad (6)$$

Пусть $\Omega = [a_0 \in R^n \mid \phi(a_0) \leq d]$. Очевидно, $\phi(a_0) = 0$, если $a_0 \in \Omega$ и $\phi(a_0) > 0$, если $a_0 \notin \Omega$. Тогда можно сформулировать задачу минимизации функции $f(a_0)$ на множестве Ω .

3. Сведение к задаче безусловной минимизации. Покажем, что поставленная задача минимизации при наличии ограничений эквивалентна задаче безусловной минимизации функционала

$$\Phi = f(a_0) + \lambda \phi(a_0), \quad (7)$$

где $\lambda > \lambda^* > 0$ — константа точного штрафа. Точка $\overline{a_0}$, доставляющая минимум функционалу (7), и будет оптимальным начальным условием в смысле этого функционала Φ .

Рассмотрим множество $\Omega_\delta = [a_0 \in R^n \mid \phi(a_0) < \delta]$. Тогда $\Omega_\delta / \Omega = [a_0 \in R^n \mid 0 < \phi(a_0) < \delta]$. Найдём

$$\phi^\downarrow(a_0) = \lim_{a_0 \rightarrow a_0'} \frac{\sum_{i=1}^n |\sum_{j=1}^n k_i^j a_0^j - d_i| - \sum_{i=1}^n |\sum_{j=1}^n k_i^j (a_0^j)' - d_i|}{\rho(a_0, a_0')} =$$

$$= \lim_{a_0 \rightarrow a'_0} \frac{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n k_i^j (a_0^j - (a_0^j)')}{\sqrt{\sum_{j=1}^n (a_0^j - (a_0^j)')^2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sum_{j=1}^n k^j t_j}{\sqrt{\sum_{i=1}^n t_i^2}} = -|k^{j_0}| < 0,$$

где $k^{j_0} = \max_j [k^j]$. Итак, нашлось такое число $\alpha = |k^{j_0}| > 0$, что $\phi^l(a_0) = -\alpha < 0 \quad \forall a_0 \in R^n$ и, в частности, $\forall a_0 \in \Omega_\delta/\Omega$.

Обратимся к функции (4). Заметим, что точка минимума $f(a_0)$ совпадает с точкой минимума функции

$$\bar{f}(a_0) = |f_1(a_0) - x_k^1| + \dots + |f_n(a_0) - x_k^n|, \quad (8)$$

которую будем рассматривать в дальнейшем, сохранив прежнее обозначение: $f(a_0) \Rightarrow \bar{f}(a_0)$. Здесь $f_i(a_0) = x^i(T)$, $i = \overline{1, n}$. Пусть $f_i(a_0) > x_k^i \quad \forall i = \overline{1, n}$. Тогда $\text{grad}(f(a_0)) = (1, \dots, 1)$ — n -мерный вектор, состоящий из единиц, $\|\text{grad}(f(a_0))\| = \sqrt{n}$. Аналогично при $f_i(a_0) < x_k^i \quad \forall i = \overline{1, n}$ $\|\text{grad}(f(a_0))\| = \sqrt{n}$. Тогда можно взять $L = \max_{a_0} [\text{grad}(f(a_0))] = \sqrt{n}$, где L — константа Липшица, т. е. функция (8) липшицева $\forall a_0 \in R^n$ и, в частности, $\forall a_0 \in \Omega_\delta/\Omega$.

Таким образом, выполнены достаточные условия существования константы точного штрафа $\lambda^* > 0$ [2], поэтому $\forall \lambda > \lambda^* > 0$ задача минимизации функции $f(a_0)$ на множестве Ω эквивалентна задаче минимизации функционала (7) на всём пространстве, и можно взять $\lambda^* = L/(2\alpha) = \sqrt{n}/(2|k^{j_0}|)$.

4. Метод наискорейшего спуска (МНС). Здесь описаны шаги, которые нужно совершить для первой итерации МНС, в результате которой по начальной точке a_{01} будет получена точка a_{02} . Пусть уже построена точка a_{0i} , $i = 1, 2, \dots$. Построим $(i+1)$ -ую точку по формуле $a_{0i+1} = a_{0i} + \alpha_i g_i$, где $\alpha_i \in R$, $g_i \in R^n$ — величины, подлежащие определению. В силу выполнения условий теоремы о существовании константы λ^* точного штрафа МНС сходится $\forall \lambda > \lambda^*$ к точке \bar{a}_0 минимума функционала (7) из любой начальной точки a_{01} .

4.1. Вычисления субдифференциала функционала Ф. Используем метод наискорейшего спуска для нахождения точки минимума функционала (7) [4]. Зафиксируем начальную точку a_{01} и вычислим субдифференциал функции (7). Субдифференцируемость следует из возможности представления (7) в виде суммы максимумов дифференцируемых функций и того, что максимум дифференцируемых функций и сумма субдифференцируемых функций есть субдифференцируемые функции. Итак, найдём $\partial\Phi(a_{01}) = \partial f(a_{01}) +$

$+\lambda\partial\phi(a_{01}) = \sum_{i=1}^n \partial|f_i(a_{01}) - x_k^i| + \lambda \sum_{j=1}^p \partial \max(0, \phi_j(a_{01}) - d_j)$. Отметим, что

$$\begin{cases} \partial|f_i(a_{01}) - x_k^i| = \text{grad}(f_i(a_{01})), & f_i(a_{01}) - x_k^i > 0; \\ \partial|f_i(a_{01}) - x_k^i| = -\text{grad}(f_i(a_{01})) = 0, & f_i(a_{01}) - x_k^i < 0; \\ \partial|f_i(a_{01}) - x_k^i| = \text{co}[\text{grad}(f_i(a_{01})), -\text{grad}(f_i(a_{01}))], & f_i(a_{01}) - x_k^i = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial \max(0, \phi_j(a_{01}) - d_j) = \text{grad}(\phi_j(a_{01})), & \phi_j(a_{01}) - d_j > 0; \\ \partial \max(0, \phi_j(a_{01}) - d_j) = 0, & \phi_j(a_{01}) - d_j < 0; \\ \partial \max(0, \phi_j(a_{01}) - d_j) = \text{co}[\text{grad}(\phi_j(a_{01})), 0], & \phi_j(a_{01}) - d_j = 0. \end{cases}$$

Здесь $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, p}$. Тогда $\partial\Phi(a_{01})$ будет представлять из себя выпуклую оболочку k векторов $h_q \in R^n$, $q = \overline{1, k}$, где k может принимать значения от 1 до $2^n + 2^p$. Рассмотрим матрицу A , столбцами которой выступают эти векторы h_q .

4.2. Проверка условия минимума функционала Φ . Известно [3], что если $\overline{a_0}$ — точка минимума (7), то

$$0_n \in \partial\Phi(\overline{a_0}). \quad (9)$$

Однако ввиду выпуклости функционала Φ необходимое условие (9) будет и достаточным. Как известно [5], для выполнения условия (9) необходимо, чтобы столбцы матрицы A были линейно зависимы.

В случае невыполнения достаточно просто проверяемого условия линейной зависимости столбцов матрицы A можно пропустить процедуру проверки условия (9) с помощью симплекс-метода, описанную ниже, и сразу перейти к поиску направления наискорейшего спуска, описанного в п. 4.3.

Проверим теперь необходимое и достаточное условие минимума (7) в точке a_{01} , используя представление нуля в виде выпуклой комбинации векторов h_i , $i = \overline{1, k}$. Нам нужно решить систему линейных уравнений

$$[A \ (1, \dots, 1)]\alpha = [0, 1], \quad \alpha_i \geq 0, \quad i = \overline{1, k}. \quad (10)$$

Используем симплекс-метод [4]. При этом можно рассматривать произвольную целевую функцию, так как нас интересует не значение какой-либо целевой функции на решениях α_i , $i = \overline{1, k}$, а существование этих решений. Итак, если симплекс-метод в задаче (10) сойдется к некоторому значению α_i , $i = \overline{1, k}$ (т. е. система (10) имеет

решение), то необходимое и достаточное условие минимума (9) выполнено, и точка a_{01} является искомой, т. е. оптимальное начальное условие найдено, и система (3) определена уже полностью. В противном случае, переходим к поиску направления наискорейшего спуска.

4.3. Нахождение направления наискорейшего спуска.

Найдём ближайшую к началу координат точку субдифференциала $\partial\Phi(a_0)$ — выпуклого многогранника, натянутого на столбцы матрицы A . Эта задача эквивалентна условной минимизации нормы

$$\|g\|, \quad g \in \partial\Phi(a_0). \quad (11)$$

В силу выпуклости и замкнутости субдифференциала $\partial\Phi(a_0)$ эта задача имеет единственное решение [3], которое обозначим g_1 . Направлением наискорейшего спуска будет величина $-g_1/\|g_1\|$. Для решения задачи (11) использован метод Малозёмова — Демьянова — Митчелла (МДМ-метод) (а именно, первый метод последовательных приближений) [3]. Заметим, что это итеративный метод, который плохо сходится, когда ноль принадлежит многограннику, именно поэтому в рассматриваемом методе наискорейшего спуска отдельно проводится проверка последнего условия, а МДМ-метод применяется лишь в случае, когда $0_n \notin \partial\Phi(\bar{a}_0)$.

4.4. Нахождение длины шага. Построим точку a_{02} по формуле

$$a_{02} = a_{01} + \alpha_1 g_1. \quad (12)$$

Здесь g_1 уже известно. В качестве длины шага α_1 возьмём решение одномерной задачи минимизации функционала Φ , которую получим при подстановке (12) в (7) (тогда $\Phi = \Phi(\alpha)$). Задача свелась к нахождению минимума функции $\Phi(\alpha) = \sum_{i=1}^n |\mu_i \alpha - \zeta_i| + \lambda \sum_{j=1}^p \max(0, \nu_j \alpha - \eta_j)$, где $\mu_i, \zeta_i, \nu_j, \eta_j \in R$ — известные числа. $i = \overline{1, n}, j = \overline{1, p}$. Очевидно, что решение задачи даёт либо одно из чисел $\zeta_i/\mu_i, \nu_j/\eta_j, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, p}$, которых $n + p$ штук, либо решение одного из уравнений $|\mu_i \alpha - \zeta_i| = |\nu_j \alpha - \eta_j|, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, p}$, которых np штук. Таким образом, сравнив значения (7) в конечном числе $n + p + 2np$ точек α , которые являются решениями соответствующих уравнений, получим наименьшее значение функционала (7) и длину шага, которую обозначим α_1 .

5. Программная реализация. Описанные шаги пункта 4 реализованы в среде Maple. Отметим, что программа работает не только для линейных функций $f_i, \phi_j, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, p}$, но и когда эти

функции имеют произвольный вид. Однако в общем случае сходимость метода не гарантирована, для каждого вида функций нужно так же, как это сделано в пункте 3, проверять достаточные условия существования константы точного штрафа и сходимости МНС. Пользователь задаёт функции $f_i, \phi_j, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, p}$, и начальную точку a_{01} .

6. Заключение. Построенное приближение (3) может быть полезно, когда получение общего решения системы (1) аналитически затруднено. В задачах управления с неопределённым начальным условием (2) часто возникает необходимость оптимизации по начальным данным согласно какому-то критерию. В данной работе рассмотрена задача приведения траектории в наименьшую окрестность заданной точки x_k с ограничением на начальное положение.

Литература

1. Фоминых А. В. Один способ построения приближённого решения системы дифференциальных уравнений // Процессы управления и устойчивость: Труды 43-й международной научной конференции аспирантов и студентов / Под ред. А. С. Ерёмкина, Н. В. Смирнова. СПб.: Издат. Дом С.-Петербур. гос. ун-та, 2012. С. 61–66.
2. Demyanov V. F., Giannessi F., Karelin V. V. Optimal control problems via exact penalty functions // J. of Global Optimiz., 1998. Vol. 12, No 3. P. 215–223.
3. Демьянов В. Ф., Малозёмов В. Н. Введение в минимакс. М.: Наука, 1972. 368 с.
4. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Том 1. Изд. 2-е, стереотип. М.: Физматлит, 1962. 464 с.
5. <http://dha.spb.ru/PDF/Alternance.pdf>

Чернэуцану Е. К.

Санкт-Петербургский государственный университет

Численные эксперименты по строгой h -отделимости¹

Рекомендовано к публикации профессором Поляковой Л. Н.

Пусть в пространстве \mathbb{R}^n заданы два конечных множества

$$A = \{a_i\}_{i=1}^m \quad \text{и} \quad B = \{b_j\}_{j=1}^k.$$

Задачу строгого отделения выпуклой оболочки множества A от множества B с помощью h гиперплоскостей H_s , определяемых уравнениями

$$\langle w^s, x \rangle = \gamma_s, \quad s \in \overline{1, h},$$

где $w^s \neq \mathbb{0}$ при всех s , можно формализовать так:

$$\begin{aligned} F(G) := & \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \max_{s \in \overline{1, h}} [\langle w^s, a_i \rangle - \gamma_s + c]_+ + \\ & + \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \min_{s \in \overline{1, h}} [-\langle w^s, b_j \rangle + \gamma_s + c]_+ \rightarrow \min_G, \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь G — $(h \times (n + 1))$ -матрица со строками

$$g^s = (w^s, \gamma_s), \quad s \in \overline{1, h};$$

$c > 0$ — параметр. В работах [1, 2] задача (1) исследовалась только при $c = 1$. Матрицу G указанных размеров будем называть *подходящей*, если у неё все w^s отличны от нулевого вектора.

По определению $F(G) \geq 0$ на всех матрицах G . Особенность задачи (1) заключается в том, что может существовать подходящая матрица G_* , которая строго отделяет $co(A)$ от B в смысле определения строгой отделимости [2], но при этом $F(G_*) > 0$.

Как показано в [3], задача (1) сводится к конечному числу задач линейного программирования. Количество таких задач равно k^h .

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 12-01-00752-а

Оно может быть достаточно большим. Поэтому представляют интерес приближённые методы и прежде всего градиентный метод, предложенный в [1, 4].

Введём обозначения

$$\begin{aligned}
 f(v, u) &= \langle v, u \rangle + c, \\
 \hat{a}_i &= \begin{pmatrix} a_i \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \check{b}_j = \begin{pmatrix} -b_j \\ 1 \end{pmatrix}, \\
 \varphi_i(G) &= \max_{s \in \overline{1, h}} [f(g^s, \hat{a}_i)]_+, \quad \psi_j(G) = \min_{s \in \overline{1, h}} [f(g^s, \check{b}_j)]_+, \\
 \hat{\varphi}_i(G) &= \max_{s \in \overline{1, h}} f(g^s, \hat{a}_i), \quad \check{\psi}_j(G) = \min_{s \in \overline{1, h}} f(g^s, \check{b}_j), \\
 \hat{R}_i(G) &= \{s \in \overline{1, h} \mid f(g^s, \hat{a}_i) = \hat{\varphi}_i(G)\}, \\
 \check{R}_j(G) &= \{s \in \overline{1, h} \mid f(g^s, \check{b}_j) = \check{\psi}_j(G)\}.
 \end{aligned}$$

Тогда задача (1) перепишется в более компактном виде

$$F(G) := \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \varphi_i(G) + \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \psi_j(G) \rightarrow \min_G.$$

Функции от матриц $\varphi_i(G)$ и $\psi_j(G)$ дифференцируемы по направлениям (в качестве которых выступают также матрицы, см. [1, 4]).

С помощью градиентного метода изучим влияние параметра c на качество строгого h -отделения.

Рассмотрим задачу строгого 3-отделения при разных значениях параметра c . Основное внимание будем уделять организации вычислений.

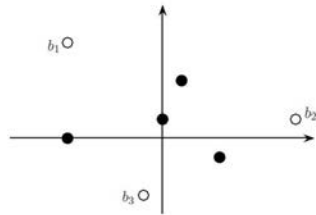


Рис. 1. Множества A и B

Пусть на плоскости заданы множества A и B , состоящие из точек $a_1 = (-3, 0)$, $a_2 = (1, 2)$, $a_3 = (2, -1)$, $a_4 = (0, 1)$; $b_1 = (-3, 3)$, $b_2 = (4, 1)$, $b_3 = (-1, -3)$.

Очевидно, что (см. рис. 1) $\text{conv}(A) \cap B = \emptyset$.

Сначала будем решать задачу строгого 3-отделения при $c = 0$.

Возьмём начальное приближение (см. рис. 2) $G_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

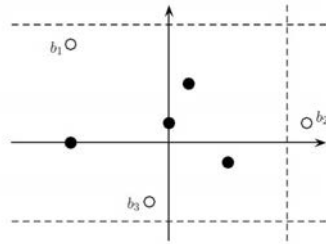


Рис. 2. Начальное приближение G_0 при $c = 0$

Заполним две таблицы.

Таблица 1. Вычисление $\varphi_i(G_0)$

i	1	2	3	4
$f(g_0^1, \hat{a}_i)$	-6	-2	-1	-3
$f(g_0^2, \hat{a}_i)$	-4	-2	-5	-3
$f(g_0^3, \hat{a}_i)$	-4	-6	-3	-5
$\hat{\varphi}_i(G_0)$	-4	-2	-1	-3
$\hat{R}_i(G_0)$	{2, 3}	{1, 2}	{1}	{1, 2}
$\varphi_i(G_0)$	0	0	0	0

Таблица 2. Вычисление $\psi_j(G_0)$

j	1	2	3
$f(g_0^1, \hat{b}_j)$	6	-1	4
$f(g_0^2, \hat{b}_j)$	1	3	7
$f(g_0^3, \hat{b}_j)$	7	5	1
$\hat{\psi}_j(G_0)$	1	-1	1
$\hat{R}_j(G_0)$	{2}	{1}	{3}
$\psi_j(G_0)$	1	0	1

Последние строки этих таблиц позволяют вычислить значение целевой функции $F(G_0) = \frac{2}{3}$.

Производная по направлению V функции $F(G)$ при $G = G_0$ принимает вид

$$F'(G_0, V) = v^2(1) - v^2(2) + \frac{1}{3}v^2(3) + \frac{1}{3}v^3(1) + v^3(2) + \frac{1}{3}v^3(3).$$

Решаем задачу линейного программирования

$$F'(G_0, V) \rightarrow \min_{V \in \Omega}, \quad (2)$$

где в качестве Ω возьмём множество (3×3) -матриц V , все элементы которых по модулю не превосходят 10. Очевидно, что решением задачи (2) является матрица

$$V_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -10 & 10 & -10 \\ -10 & -10 & -10 \end{pmatrix},$$

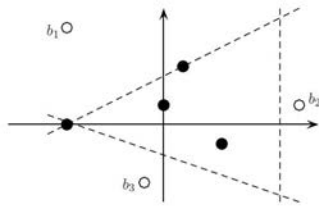


Рис. 3. G_1 — решение задачи при $c = 0$

при этом $F'(G_0, V_0) = -40$. Получили, что V_0 — направление убывания функции $F(G)$ при $G = G_0$. Минимум функции $F(G_0 + tV_0)$ на луче $t > 0$ достигается при $t_0 = 0, 1$, поэтому $G_1 := G_0 + t_0V_0 =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что $F(G_1) = 0$. Учитывая, что G_1 — подходящая матрица, заключаем, что G_1 — решение рассматриваемой задачи (см. рис. 3).

Изменим в данной задаче значение параметра c . Вместо $c = 0$ положим $c = 1$. В качестве начального приближения возьмём ту же матрицу G_0 . Находим значение целевой функции $F(G_0) = \frac{4}{3}$.

Производная по направлению V функции $F(G)$ при $G = G_0$ принимает вид

$$F'(G_0, V) = \frac{1}{4}[\langle v^1, \hat{a}_3 \rangle]_+ + \frac{1}{3} \left\{ \langle v^2, \check{b}_1 \rangle + [\langle v^1, \check{b}_2 \rangle]_+ + \langle v^3, \check{b}_3 \rangle \right\}.$$

Решаем задачу линейного программирования (2)

$$\frac{1}{4}t_1 + \frac{1}{3} \left\{ \langle v^2, \check{b}_1 \rangle + t_2 + \langle v^3, \check{b}_3 \rangle \right\} \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} |v^s(\alpha)| &\leq 10, \quad \alpha \in \overline{1, 3}, \quad s \in \overline{1, 3}; \\ t_1 &\geq \langle v^1, \hat{a}_3 \rangle, \quad t_2 \geq \langle v^1, \check{b}_2 \rangle, \quad t_1 \geq 0, \quad t_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Для решения последней задачи использовалась программа из MATLAB [5]. Получили матрицу $V_0 = \begin{pmatrix} 3,06 & 7,8 & 6,3 \\ -10 & 10 & -10 \\ -10 & -10 & -10 \end{pmatrix}$, при этом $F'(G_0, V_0) = -40$. Минимум функции $F(G_0 + tV_0)$ на луче $t > 0$ достигается при $t_0 = 0,1$, поэтому $G_1 = \begin{pmatrix} 1,3 & 0,8 & 3,6 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ (см. рис. 4). Непосредственно проверяется, что $F(G_1) = 0,5$.

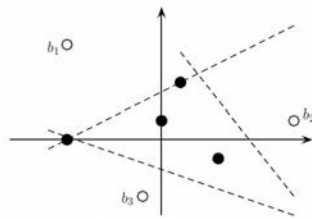


Рис. 4. Подходящая матрица G_1

Повторяем процесс, и на следующем шаге получаем матрицу $G_2 = \begin{pmatrix} 1,3 & 0,8 & 3,6 \\ -0,6 & 1,6 & 3,4 \\ -0,6 & -2 & 3,4 \end{pmatrix}$, при этом $F(G_2) = 0,075$. Проверим для G_2 выполнение строгих неравенств из определения строгой отделимости двух множеств [2]. Они выполняются (см. рис. 5). Значит, подходящая матрица G_2 осуществляет строгое 3-отделение (хотя $F(G_2) > 0$).

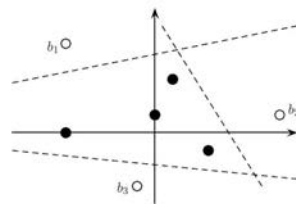


Рис. 5. G_2 — решение задачи при $c = 1$

Литература

1. Astorino A., Gaudioso M. Polyhedral separability throught successive LP // JOTA, 2002. Vol. 112, No 2. P. 265–293.
2. Малозёмов В. Н., Чернэуцану Е. К. Строгая h-отделимость двух множеств // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 18 декабря 2010 г. <http://dha.spb.ru/PDF/hSeparability.pdf>
3. Чернэуцану Е. К. Строгая h-отделимость и линейное программирование // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 29 января 2011 г. <http://dha.spb.ru/PDF/hSeparabilityLP.pdf>
4. Малозёмов В. Н., Чернэуцану Е. К. Численный метод строгого h-отделения // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 15 октября 2011 г. <http://dha.spb.ru/PDF/hSepNumerical.pdf>
5. Сергеев А. Н., Соловьёва Н. А., Чернэуцану Е. К. Решение задач линейного программирования в среде MATLAB // Семинар «DHA & CAGD». Программные реализации. 12 февраля 2011 г. <http://dha.spb.ru/PDF/MatLabLP.pdf>

Чумаков А. А., Тамасян Г. Ш.

Санкт-Петербургский государственный университет

Методы нахождения наименьшего расстояния между эллипсоидами¹

1. Введение. Данная статья продолжает исследования авторов в области вычислительной геометрии. Идейной основой этих исследований являются негладкий анализ и теория точных штрафных функций. В работе рассматривается задача нахождения ближайших точек между двумя эллипсоидами. Представлено несколько известных алгоритмов и предложен новый метод нахождения наименьшего расстояния между эллипсоидами. Приведены несколько примеров, демонстрирующих потенциальные возможности рассматриваемых алгоритмов.

2. Постановка задачи. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$. Требуется найти ближайшие точки между эллипсоидами Ω_1 и Ω_2 , где

$$\Omega_k = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid h_k(x) = \frac{1}{2}x^T A_k x + x^T B_k + C_k = 0 \right\}, \quad k = 1, 2, \quad (1)$$

A_k — постоянные $(n \times n)$ -матрицы, симметричные и положительно определенные, B_k — постоянные $(n \times 1)$ -вектор-столбцы, $C_k \in \mathbb{R}$ — константы.

Обозначим через x_k точку, принадлежащую эллипсоиду Ω_k , т. е. $h_k(x_k) = 0$ при $k = 1, 2$. Поставленную проблему можно решить как задачу условной оптимизации $\|x_1 - x_2\| \rightarrow \min_{\substack{x_1 \in \Omega_1 \\ x_2 \in \Omega_2}}$.

3. Точная штрафная функция. Обозначим через $z = [x_1, x_2]$. Введем функцию $f(z) = \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|^2$ и множество

$$\Omega = \{z = [x_1, x_2] \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid h_1(x_1) = 0, h_2(x_2) = 0\}.$$

Множество Ω можно представить в эквивалентном виде

$$\Omega = \{z = [x_1, x_2] \in \mathbb{R}^{2n} \mid \varphi(z) = 0\},$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 12-01-00752

где

$$\varphi(z) = |h_1(x_1)| + |h_2(x_2)|.$$

Пусть $\lambda \geq 0$ фиксировано. Введем функцию

$$\Phi_\lambda(z) = f(z) + \lambda\varphi(z). \quad (2)$$

Функция $\Phi_\lambda(z)$ называется *штрафной функцией*, а число λ — *штрафным параметром*. В [1] представлен ряд теорем, при выполнении которых $\Phi_\lambda(z)$ является *функцией точного штрафа*.

Таким образом, задача минимизации функции $f(z)$ на множестве Ω сведена к задаче минимизации функции $\Phi_\lambda(z)$ на всем пространстве \mathbb{R}^{2n} при $\lambda > \lambda^*$, где λ^* — константа точного штрафа [1], для которой можно найти оценки.

4. Метод гиподифференциального спуска (МГС). Исследуемая на экстремум функция $\Phi_\lambda(z)$ (2) принадлежит классу гиподифференцируемых функций [1, 2]. Имеем

$$\Phi_\lambda(z + \Delta) = \Phi_\lambda(z) + \max_{[a,v] \in \underline{d}\Phi_\lambda(z)} [a + (v, \Delta)] + o_x(\Delta),$$

где $\frac{o_x(\varepsilon\Delta)}{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} 0$ для всех $\Delta \in \mathbb{R}^n$. Компактное множество $\underline{d}\Phi_\lambda(z)$ называется гиподифференциалом функции $\Phi_\lambda(z)$ в точке z . Для функции (2) получаем $\underline{d}\Phi_\lambda(z) = \text{co} \{V(\mu_1, \mu_2) \mid |\mu_1| \leq \lambda, |\mu_2| \leq \lambda\}$, где

$$V(\mu_1, \mu_2) = \left[\mu_1 h_1(x_1) + \mu_2 h_2(x_2) - \lambda\varphi(z), \right. \\ \left. \mu_1 h_1'(x_1) + \mu_2 h_2'(x_2) + f'(z) \right],$$

$$f'(z) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ -(x_1 - x_2) \end{pmatrix}, \quad h_1'(x_1) = \begin{pmatrix} A_1 x_1 + B_1 \\ \mathbb{O}_n \end{pmatrix},$$

$$h_2'(x_2) = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_n \\ A_2 x_2 + B_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{O}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим также, что отображение $\underline{d}\Phi_\lambda(z)$ является непрерывным в метрике Хаусдорфа.

Теорема [2]. Для того чтобы в точке $z^* \in \mathbb{R}^{2n}$ функция $\Phi_\lambda(z)$ достигала своего наименьшего на \mathbb{R}^{2n} значения, необходимо, чтобы

$$[0, \mathbb{O}_{2n}] \in \underline{d}\Phi_\lambda(z^*). \quad (3)$$

Если точка $z \in \mathbb{R}^{2n}$ не является стационарной, то можно найти направление спуска функции $\Phi_\lambda(z)$ в точке z . Для это требуется решить систему линейных уравнений $D \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \eta$, где

$$D = \begin{pmatrix} h_1^2(x_1) + (h_1'(x_1), h_1'(x_1)) & h_1(x_1)h_2(x_2) \\ h_1(x_1)h_2(x_2) & h_2^2(x_2) + (h_2'(x_2), h_2'(x_2)) \end{pmatrix},$$

$$\eta = \begin{pmatrix} \lambda\varphi(z)h_1(x_1) - (h_1'(x_1), f'(z)) \\ \lambda\varphi(z)h_2(x_2) - (h_2'(x_2), f'(z)) \end{pmatrix}.$$

Пусть μ_1^*, μ_2^* — решение системы, тогда вектор $g(z) = -\frac{G^*(z)}{\|G^*(z)\|}$ является направлением спуска, здесь $G^*(z) = \mu_1^*h_1'(x_1) + \mu_2^*h_2'(x_2) + f'(z)$.

Опишем метод гиподифференциального спуска для нахождения стационарных точек, т. е. точек, удовлетворяющих условию (3).

Выберем произвольное $z_0 \in \mathbb{R}^{2n}$. Пусть уже найдено $z_k \in \mathbb{R}^{2n}$. Если $\varphi(z_k) = 0$ и выполнено условие (3), то точка z_k является стационарной, и процесс прекращается. Если же условие (3) не выполнено, то возьмем вектор $G^*(z_k)$ — гипогradient функции Φ_λ в точке z_k . Теперь найдем

$$\min_{\beta \geq 0} \Phi_\lambda(z_k - \beta G^*(z_k)) = \Phi_\lambda(z_k - \beta_k G^*(z_k)) \quad (4)$$

и положим $z_{k+1} = z_k - \beta_k G^*(z_k)$. Имеем $\Phi_\lambda(z_{k+1}) < \Phi_\lambda(z_k)$. Пользуясь непрерывностью в метрике Хаусдорфа гиподифференциального отображения как функции z , можно доказать, что описанный метод сходится в следующем смысле: $\|G^*(z_k)\| \rightarrow 0$. Заметим, что величина шага спуска β в задаче (4) вычисляется аналитически.

5. «Алгебраические» методы. В работах [3–5] предлагается построение алгебраического уравнения от одной переменной, среди корней которого находится квадрат искомого расстояния. В [3, 4] полином получается в результате применения методов теории исключения переменных [6] и имеет степень не менее $2n(n+1)$.

6. Метод «шаров» [7]. В работах [7, 8] для поиска минимального расстояния ρ между двумя эллипсоидами (Ω_1 и Ω_2) на каждой итерации строятся шары, вписанные в эллипсоиды, касающиеся граничной точки эллипсоида.

Процесс начинается из центров эллипсоидов. На k -ой итерации имеем центры шаров c_1 и c_2 . Находим величины t_1 и t_2 как решения двух квадратных уравнений

$$\begin{aligned} t_1 &= \max\{t \in [0, 1] \mid (1-t)c_1 + tc_2 \in \Omega_1\}, \\ t_2 &= \min\{t \in [0, 1] \mid (1-t)c_1 + tc_2 \in \Omega_2\}. \end{aligned}$$

Если $t_2 \leq t_1$, то расстояние $\rho = 0$. В противном случае находим

$$\begin{aligned} x &= c_1 + t_1(c_2 - c_1), \quad y = c_1 + t_2(c_2 - c_1), \\ \theta_1 &= \arccos\left(\frac{(y-x)^T(A_1x+B_1)}{\|y-x\| \cdot \|A_1x+B_1\|}\right), \\ \theta_2 &= \arccos\left(\frac{(x-y)^T(A_2y+B_2)}{\|x-y\| \cdot \|A_2y+B_2\|}\right). \end{aligned}$$

Если $\theta_1 = \theta_2 = 0$, то процесс останавливается. Иначе, считаем новые центры шаров c_1, c_2 по формулам

$$c_1 = x - \frac{1}{\|A_1\|}(A_1x+B_1), \quad c_2 = y - \frac{1}{\|A_2\|}(A_2y+B_2).$$

Здесь $\|A\|$ — евклидова норма матрицы A .

Замечание 1. В случае, если один эллипсоид содержит другой, то метод «шаров» не применим.

Замечание 2. Если один или оба эллипсоида вырождаются в точку, то метод «шаров» не применим (происходит закливание), в то время, как метод гиподифференциального спуска работает и выдает корректные результаты.

Замечание 3. Если один из эллипсоидов пустой, то метод гиподифференциального спуска «информирует» об этом.

7. Численные примеры. Теперь рассмотрим несколько примеров. Были проведены вычисления для $n = \{2, 3, 4\}$ и при различном расположении эллипсоидов. Все вычисления проводились с точностью 10^{-6} и представлены в таблицах 1–3.

Пример 1. (Эллипсы узкие и расположены далеко друг от друга). Найти минимальное расстояние между эллипсами:

$$\frac{1}{10000}x^2 + y^2 - \frac{101}{5000}x - 2000y + 1000000,02 = 0,$$

$$x^2 + \frac{1}{10000}y^2 - 4x - \frac{101}{5000}y + 4,0201 = 0.$$

Таблица 1. Метод «шаров» и МГС

x_1	(15,2854; 999,4848)
x_2	(2,0001; 200,9999)
ρ	798,5953

Пример 2. [9] (Один эллипс внутри другого). Найти минимальное расстояние между эллипсами

$$10x_1^2 - 12x_1x_2 + 8x_2^2 = 1 \quad \text{и} \quad x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 1.$$

Метод «шаров» не применим в данном случае (см. замечание 1).

Таблица 2. МГС

x_1	(0,38383163337729; 0,44186360180114)
x_2	(0,54499741370335; 0,60910968977014)
ρ	0,23226205606823

При использовании метода [3, 4] приходится находить положительные корни у полинома шестой степени.

Пример 3. Найти минимальное расстояние между эллипсоидами (см. (1)) в \mathbb{R}^4 :

$$A_1 = A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B_1 = -1000 \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 17 \\ 18 \\ 17 \end{pmatrix},$$

$$C_1 = 49499999, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 29 \\ 24 \\ 20 \\ 29 \end{pmatrix}, \quad C_2 = 132.$$

Таблица 3. Метод «шаров» и МГС

x_1	(999,9636; 1000,8464; 1999,1871; 1999,4339)
x_2	(-3,9637; -3,8465; -0,1870; -1,4339)
ρ	3165,16165

8. Заключение. В работе рассмотрено несколько алгоритмов решения поставленной проблемы. Разработано программное обеспечение в системах MATLAB и Maple, реализующее данные алгоритмы. Из проведенных экспериментов следует, что метод гиподифференциального спуска более универсальный, чем метод «шаров» [7], и менее трудоемкий («эффективнее») нежели методы [3–5].

Литература

1. Демьянов В. Ф. Условия экстремума и вариационные задачи. М.: Высшая школа, 2005. 335 с.
2. Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990. 432 с.
3. Утешев А. Ю., Яшина М. В. Нахождение расстояния от эллипсоида до плоскости и квадрики в \mathbb{R}^n // Доклады АН, 2008. Т. 419, № 4. С. 471–474.
4. Утешев А. Ю., Яшина М. В. Нахождение расстояния между поверхностями второго порядка в \mathbb{R}^n // Процессы управления и устойчивость: Труды 37-й научной конференции аспирантов и студентов / Под ред. А. В. Платонова, Н. В. Смирнова. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2006. С. 103–107.
5. Лебедев Д. М., Полякова Л. Н. Задача проектирования нулевой точки на квадрику // Вестник СПбГУ. Сер. 10, 2013. Вып. 1. С. 11–17.
6. Калинина Е. А., Утешев А. Ю. Теория исключения. Учебное пособие. СПб.: НИИ Химии СПбГУ, 2002. 72 с.
7. Lin A., Han S.-P. On the distance between two ellipsoids // SIAM Journal on Optimization, 2002. Vol. 13. P. 298–308.
8. Косолап А. И. Квадратичные оптимизационные задачи компьютерной геометрии // Искусственный интеллект, 2010. № 1. С. 70–75.
9. Утешев А. Ю. Вычисление расстояний между геометрическими объектами [Электронный ресурс] // Записная книжка профессора Утешева [сайт]. [2007].
<http://pmu.ru/vf4/algebra2/optimiz/distance>

Шуляк А. С.

Санкт-Петербургский государственный университет

Задача чебышевской аппроксимации при наличии ограничений

Рекомендовано к публикации профессором Демьяновым В. Ф.

1. Введение. В работе исследуется частный случай задачи чебышевской аппроксимации. Классическая задача чебышевской аппроксимации [1] заключается в нахождении полинома наилучшего приближения. Ниже эта задача рассматривается при наличии ограничений на коэффициенты полинома.

2. Постановка задачи. Пусть задана таблица значений некоторой функции

$$y_k = y(t_k), \quad k \in [0, N],$$

где аргументы (узлы) упорядочены по возрастанию

$$t_0 < t_1 < \dots < t_N.$$

Задача заключается в том, чтобы найти полином $P_n(A^*, t_k)$, доставляющий минимум функционалу $F(A)$:

$$F(A^*) = \min_{A \in \Omega} F(A),$$

где

$$F(A) = \max_{k \in [0, N]} |f(A, t_k)|,$$

$$f(A, t_k) = y_k - P_n(A, t_k),$$

$$P_n(A, t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n,$$

$$A = (a_0, \dots, a_n) \in R^{n+1},$$

при условии, что на значения A наложены ограничения:

$$\Omega = \left\{ A \in R^{n+1} \left| \|A\|^2 = \sum_{i=0}^n a_i^2 \leq 1 \right. \right\}.$$

Сформулированная задача является классической задачей чебышевской полиномиальной аппроксимации (см. [1]). Отличие состоит в наличии ограничений на коэффициенты полинома.

3. Решение задачи. Из теории точных штрафов известно, что множество Ω можно записать в виде $\Omega = \{A \in R^{n+1} | \varphi(A) = 0\}$, где

$$\varphi(A) \geq 0 \quad \forall A \in R^{n+1}.$$

Если при этом функция φ удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, то поставленная задача условной минимизации функции F , т. е. минимизации при наличии ограничений при достаточно больших λ эквивалентна задаче безусловной минимизации, т. е. минимизации на всем пространстве функции

$$\Phi_\lambda(A) = F(A) + \lambda\varphi(A). \quad (1)$$

Справедлива следующая

Теорема [2]. Пусть имеет место неравенство

$$\inf_{A \in R^{n+1}} F(A) > -\infty$$

и выполнены следующие условия:

1. Существует $\lambda_0 < \infty$ такое, что для любого $\lambda \geq \lambda_0$ найдется $A_\lambda \in R^{n+1}$, для которого

$$\Phi_\lambda(A_\lambda) = \Phi_\lambda^* = \inf_{A \in R^{n+1}} \Phi_\lambda(A).$$

2. Найдутся $\delta > 0$ и $a > 0$ такие, что

$$\varphi^\downarrow(A) = \liminf_{Y \rightarrow A} \frac{\varphi(Y) - \varphi(A)}{\rho(A, Y)} \leq -a < 0 \quad \forall A \in \Omega_\delta \setminus \Omega, \quad (2)$$

где

$$\Omega_\delta = \left\{ A \in R^{n+1} \mid \varphi(A) < \delta \right\}.$$

3. Функция F липшицева на $\Omega_\delta \setminus \Omega$, т. е. для некоторого $L < \infty$ будет

$$|F(A_1) - F(A_2)| \leq L\rho(A_1, A_2) \quad \forall A_1, A_2 \in \Omega_\delta \setminus \Omega.$$

Тогда существует $\lambda^* \geq \lambda_0$ такое, что при всех $\lambda > \lambda^*$

$$\varphi(A_\lambda) = 0, \quad F(A_\lambda) = \inf_{A \in \Omega} F(A),$$

т. е. точка A_λ является точкой минимума функционала F на множестве Ω .

Проверим условие (2). В нашем случае в качестве функции φ можно взять функцию $\varphi(A) = \max\{f(A), 0\}$, где $f(A) = \|A\|^2 - 1$.

При $A \notin \Omega$ будет $\varphi(A) = f(A)$ и тогда (см. [2])

$$\varphi^\downarrow(A) = -\|f'(A)\| = -2\|A\|.$$

Так как при $A \notin \Omega$ имеем $\|A\| > 1$, то $\varphi^\downarrow(A) < -2$, и условие (2) выполнено. Поэтому из теоремы заключаем, что при достаточно больших $\lambda > 0$ задача минимизации $F(A)$ на множестве Ω эквивалентна задаче минимизации функционала $\Phi_\lambda(A)$ на всем пространстве R^{n+1} . Функционал $\Phi_\lambda(A)$ является выпуклым, так как функции $\varphi(A)$ и $F(A)$ выпуклые. В точке минимума функционала $\Phi_\lambda(A)$ должно выполняться необходимое условие

$$0_{n+1} \in \partial\Phi_\lambda(A^*), \quad (3)$$

где $\partial\Phi_\lambda(A^*)$ — субдифференциал функционала Φ_λ в точке A^* . В силу выпуклости Φ_λ условие (3) является и достаточным.

Построим $\partial\Phi_\lambda(A^*)$. Из (1)

$$\partial\Phi_\lambda(A^*) = \partial F(A^*) + \lambda\partial\varphi(A^*),$$

где $\partial F(A^*)$ и $\partial\varphi(A^*)$ — субдифференциалы, соответственно, функций F и φ в точке A^* . Обе эти функции — функции максимума. Найдем их субдифференциалы (см. [1])

$$\partial\varphi(A^*) = \text{co}\{2A^*, 0_{n+1}\},$$

$$\partial F(A^*) = \text{co}\{T_k \text{ sign} f(A^*, t_k) \mid k \in R(A^*)\},$$

где

$$T_k = P_n^{-1}(A^*, t_k) = (1, t_k, \dots, t_k^n),$$

$$R(A) = \{k \in [0, N] \mid f(A, t_k) = F(A)\}.$$

В итоге

$$\partial\Phi_\lambda(A^*) = \text{co}\{T_k \text{ sign}f(A^*, t_k) \mid k \in R(A)\} + \lambda \text{co}\{2A^*, 0_{n+1}\}. \quad (4)$$

Из (3) и (4) понятно, что для проверки точки $A_0 \in \Omega$ на минимум функционала $F(A)$ на множестве Ω следует найти

$$\min_{V \in \partial\Phi_\lambda(A_0)} \|V\|^2 = \|V_0\|^2.$$

Если $\|V_0\| = 0$, то необходимое и достаточное условие минимума выполнено. Если же $\|V_0\| > 0$, то направление $g_0 = -\frac{V_0}{\|V_0\|}$ является направлением наискорейшего спуска функционал Φ_λ в точке V_0 , и с его помощью можно «улучшить» точку V_0 .

4. Заключение. С помощью квазидифференциального исчисления и метода точных штрафных функций было выведено необходимое и достаточное условие минимума задачи чебышевской аппроксимации при наличии ограничений. С его помощью можно построить метод последовательных приближений.

Литература

1. Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н. Введение в минимакс. М.: Наука, 1972. 368 с.
2. Демьянов В. Ф. Условия экстремума и вариационное исчисление. М.: Высшая школа, 2005. 335 с.