

# Кто они, негладкие функции: гадкие утята или прекрасные лебеди?

Международная научная конференция «Конструктивный негладкий анализ и смежные вопросы» (CNSA-2012) прошла в июне в Международном математическом институте им. Леонарда Эйлера (ПОМИ, Санкт-Петербург)

**В** конце XXI века французский математик Ш.Эрмит написал своему голландскому коллеге Т.Стилтьесу: «Я отвращаюсь с отвращением и ужасом от этой жалкой язвы — функций, не имеющих даже производных». Таким было тогда отношение к негладким функциям. Прошли годы, негладкие функции возникли при решении различных прикладных и теоретических задач. Их пришлось изучать. Появилась целая наука, им посвященная, — негладкий анализ. И оказалось, что эта «жалкая язва» представляет собой прекрасный объект для исследований, да еще имеющий многочисленные и важные приложения. А «гадкие утята» выросли, остепенились и превратились в прекрасных лебедей.

Международная конференция по конструктивному негладкому анализу и смежным вопросам (CNSA-2012) была про-

ведена по инициативе ученых Санкт-Петербургского университета и организована совместно с Петербургским отделением Математического института им. В.А.Стеклова (ПОМИ) и Национальным исследовательским университетом (Высшая школа экономики, Нижегородское отделение).

Конференция проходила с 18 по 23 июня 2012 года в Международном математическом институте им. Леонарда Эйлера (ПОМИ, Санкт-Петербург). Она была посвящена 50-летию начала активных работ в области негладкого анализа (НГА) и недифференцируемой оптимизации (НДО). На ней были подведены итоги исследований в области НГА и НДО и намечены перспективы развития этого направления и его приложений.

В конференции приняли участие ведущие ученые, работающие

в этой области науки. Было заслушано 114 докладов в 7 секциях:

1. Конструктивные средства негладкого анализа.
2. Негладкие задачи вариационного исчисления и теории управления.
3. Задачи негладкой механики.
4. Недифференцируемая оптимизация.
5. Приложения негладкого анализа (негладкое математическое моделирование, задачи математической диагностики).
6. Негладкие методы в теории игр.
7. Нелинейные чебышевские аппроксимации и негладкая оптимизация.

В работе конференции приняли участие 116 представителей из 17 стран.

Необходимость решения практических задач (в частности, задач оптимизации) была одной из главных побудительных при-



Участники конференции у здания ПОМИ, Санкт-Петербург



Участники конференции Л.А.Петросян (СПбГУ), Р.Т.Рокафеллар (США), Р.Миффлин (США)

чин возникновения и развития математики, которая, в свою очередь, и предоставляла средства и методы для решения этих задач. Математика является служанкой и одновременно царицей всех наук. Математические методы используются практически во всех областях знаний, в том числе в медицине, экономике и гуманитарных науках. Известное высказывание К.Маркса о том, что «в каждой науке столько истины, сколько в ней математики», приобретает в настоящее время реальный и всеобъемлющий характер. Все информационные технологии имеют в своей основе математические методы. Еще в глубокой древности получили развитие такие разделы математики, как арифметика, алгебра и геометрия, которые вместе с появившейся позднее (в ответ на потребности судоходства и астрономии) тригонометрией стали основными предметами элементарной математики.

Возникновение высшей математики связано с началом индустриальной революции. Главный раздел высшей математики — математический анализ, основным понятием которого является введенное (в конце XVIII века) И.Ньютоном и В.Лейбницем понятие градиента (производной в одномерном случае). Появилась возможность решать широкий класс задач, описываемых дифференцируемыми (гладкими) функциями. Введенного аппарата оказалось

достаточно для удовлетворения потребностей науки и техники на более чем три столетия.

Однако негладкие задачи упорно «стучались» в дверь, и П.Л.Чебышев, профессор Санкт-Петербургского университета, «пробил» им дорогу, поставив и решив 140 лет тому назад задачу о многочленах, наименее уклоняющихся от нуля (знаменитые полиномы Чебышева). При этом он использовал имевшиеся тогда средства «гладкого» математического анализа.

Но было ясно, что для решения более широкого класса негладких задач требовалось развитие своего собственного аппарата. Итальянский математик У.Дини бо-

лее ста лет тому назад ввел понятие производной по направлению. Семейство функций, дифференцируемых по направлениям, существенно богаче семейства гладких функций. Для изучения этого семейства функций и, в частности, решения задач их оптимизации, появился негладкий анализ, представляющий собой дальнейшее развитие классического математического анализа. Прорыв в этой области произошел в 1962 году, когда Ж.-Ж.Моро (Франция) ввел понятие субдифференциала для выпуклой функции. 60-е и 70-е годы XX века стали временем бурного развития негладкого анализа. Американские исследователи Р.Т.Рокафеллар, Дж.Данскин и Р.Миффлин, советские ученые Ю.М.Ермолов, А.Д.Иоффе, В.Н.Малоземов, Е.А.Нурминский, Б.Т.Поляк, Б.Н.Пшеничный, А.М.Рубинов, В.Н.Тихомиров, Н.З.Шор, французские математики М.Балинский, Ф.Кларк, Ж.-П.Обен первыми начали изучение свойств негладких функций и методов их исследования. За истекшие полвека негладкий анализ стал самостоятельным разделом современной математики, являющимся обобщением и дальнейшим развитием классического математического анализа, а возникшая одновременно недифференцируемая оптимизация превратилась в богатый арсенал методов и алгоритмов для решения различных задач (гладкой и негладкой) оптимизации.



А.А.Чумаков и А.С.Бойкова (студенты ПМ-ПУ), Дж. Ди Пилло (Италия), Б.Мордухович (США)

На конференции выступили основатели и создатели НГА и НДО: Р.Ветс (США), Ф.Джианнеси (Италия), Дж. Ди Пило (Италия), А.Д.Иоффе (Израиль), Ж.-Б.Ириа-Уррути (Франция), Ж.-П.Крузе (Франция), А.Б.Куржанский (РФ), С.С.Кутателадзе (РФ), В.Н.Малоземов (РФ), Р.Миффлин (США), Б.Мордухович (США), Д.Паллашке (Германия), Р.Т.Рокафеллар (США), В.М.Тихомиров (РФ), Ф.Л.Черноусько (РФ), а также ученые, внесшие существенный вклад в дальнейшее развитие НГА и НДО и использование негладкого анализа для решения задач теории управления, механики, экономики, теории игр: П.Алявдин (Польша), А.Багиров (Австралия), М.Гаудиозо (Италия), Й.Гвиннер (Германия), В.В.Гороховик (Беларусь), С.Демпе (Германия), С.И.Дудов (РФ), А.Кругер (Австралия), Ю.Ледяев (США), А.С.Стрекаловский (РФ), П.Пардалос (США), Л.А.Петросян (РФ), Е.С.Половинкин (РФ), Л.Н.Полякова (РФ), Т.Рассиас (Греция), И.В.Романовский (РФ), Р.Урбанский (Польша) и др. Некоторые члены оргкомитета и создатели НГА и НДО не смогли по состоянию здоровья лично прибыть в Санкт-Петербург, но прислали свои доклады или приветствия: Ф.Кларк (Франция), М.Балинский (Франция), Ж.-П.Обен (Франция).

Наибольшее внимание было уделено развитию аппаратных средств негладкого анализа (таких как субдифференциал и его обобщения), вариационного анализа, методов недифференцируемой оптимизации, применению негладкого анализа к решению задач механики, диагностики и распознавания образов, теории игр.

В выступлениях участников поднимались как теоретические вопросы НГА и НДО, так и проблемы конкретных приложений. Например, в докладах Р.Т.Рокафеллара, Р.Ветса и А.Жофра обсуждалось применение НГА к решению задач экономики. Связи негладкого анализа с другими смежными дисциплинами обсуждались в выступлениях И.В.Романовского, Л.А.Петросяна, В.М.Буре (все СПбГУ), Б.Гольденгорина (РФ), В.Гончарова (Португалия), Ян Гао

(Китай), П.Георгиева (Болгария). Отмечался (например, в докладе проф. Т.Рассиаса) большой вклад российских и советских ученых как в создание негладкого анализа («крестным отцом» которого является П.Л.Чебышев), так и в его развитие.

Наряду с известными учеными выступали и молодые исследователи (студенты, аспиранты, начинающие ученые), сделавшие интересные доклады. Непосредственное знакомство с ведущими учеными в своей области имеет огромное воспитательное значение. Начинающему исследователю (особенно из России и стран СНГ) трудно посетить научные центры, в которых работают признанные авторитеты, и встретиться с ними. Одной из целей конференции и было собрать «отцов-основателей» негладкого анализа и молодых ученых, работающих в этой области. Как было сказано в одном из выступлений, «если Магомет не идет к горе, то гора идет к Магомету». Молодые ученые из разных стран имели редкую возможность увидеть и услышать в одном месте и в одно время выступления выдающихся ученых, обсудить с ними свои научные проблемы. Можно надеяться, что их общение с ведущими учеными в области НГА окажется полезным и плодотворным.

Было проведено специальное заседание, посвященное автору понятия субдифференциал Ж.-Ж.Моро и памяти «первопроходцев» в этой области науки Б.Н.Пшеничного, А.М.Рубинова, Н.З.Шора. В работе конференции участвовали вдова А.М.Рубинова Зари Джалилова, его дочь С.А.Ефимова (которая провела экскурсию для участников конференции в Кронштадт и Петергоф) и внук Андрей Ефимов, показавший свой фильм о нашем городе.

Конференция проведена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-01-06029-г) и Национального исследовательского университета — Высшей школы экономики в Нижнем Новгороде. Особенно следует отметить помощь лаборатории алгоритмов и техноло-

гий для анализа сетей профессора П.Пардалоса в Н.Новгороде и лично Тимура Медведева.

В организации конференции неоценимую помощь оказали сотрудники Международного математического института им. Эйлера Т.В.Виноградова, Н.В.Залесская, Т.Я.Конькова и его директор С.В.Кисляков. Подготовка конференции и ее материалов проводилась В.В.Карелиным, Г.Ш.Тамасяном, Э.В.Демьяновой, Н.А.Толочинской, Ю.Ю.Пупышевой, Л.К.Корсаковой, В.К.Шомесовой. Студенты факультета прикладной математики-процессов управления СПбГУ А.С.Бойкова, А.А.Чумаков, О.А.Семенова и Е.К.Чернэуцану работали непосредственно с участниками конференции, оказывая им необходимую помощь.

Оперативно и качественно были подготовлены тезисы конференции, постеры и блокноты (В.В.Мещерин). Издательство «Искусство России» (Н.В.Кучумова) качественно и в срок отпечатало альбом «Оптимизация в лицах. Путешествие в Эндоландию», посвященный Конференции и содержащий более 1150 фотографий, на которых представлено более 700 ученых, работавших или работающих в области НГА и НДО. Были изготовлены значки с логотипом конференции.

К началу конференции были изданы тезисы докладов, они имеются на сайте конференции <http://www.pdmi.ras.ru/EIMI/2012/NSA/index.html>

Создан видеофильм о конференции. Он доступен в интернете по следующим адресам:

<http://youtu.be/86EcbulHXBI>  
<http://video.yandex.ru/users/grigoriytamasyan/view/1/>

За первые полтора месяца на обоих сайтах было более 750 просмотров этого видеофильма.

**Сопредседатели Оргкомитета конференции CNSA-2012: академик РАН А.Б.КУРЖАНСКИЙ (МГУ), заслуженный деятель науки РФ В.Ф.ДЕМЬЯНОВ (СПбГУ)**