О теории графов

В прошлой статье в связи с вопросом преподавания алгебры я уже упоминал о графах. Причем там графы упоминались как хороший материал для различного рода иллюстраций некоторых понятий алгебры, например, использование графов для визуализации решений системы линейных уравнений. В этой статье я продолжу начатую в прошлой статье линию – связь алгебры с графами, причем на этот раз акцент будет сделан на графах, а не алгебре. Отмечу, что я начал заниматься графами относительно недавно, в начале 2000-ых годов («относительно», имеется в виду, относительно своего срока учебы и работы в университете). Обращаю внимание, что занимался этим вопросом я не один (например, ведение в свое время странички «ГрафоMann» на факультетском сайте одному было бы просто невозможно), поэтому местоимению «мы» я отдаю предпочтение перед местоимением «я».

Итак, начну свою очередную статью.

Обеспокоенные сокращением объема преподавания алгебры на факультете в связи с переходом на двухступенчатую систему образования – бакалавриат и магистратуру, мы решили развивать именно алгебраический подход к теории графов, связанный с линейной алгеброй. Такой подход позволяет в курсе теории графов повторить основные разделы линейной алгебры, правда уже над полем по модулю два, и лишний раз подчеркнуть роль алгебраических структур в самой алгебре. Чтобы отметить, что наш подход к теории графов не является чем-то совсем уж уникальным, сошлемся на матричную теорему о деревьях (о числе остовов графа), уходящую корнями в середину 19-го века.

Известна роль математического моделирования в преподавании на факультетах прикладной математики. Теория графов и в этой области представляет одно из ведущих направлений. В своем подходе к графам, как простейшим моделям связных систем, сам граф мы рассматриваем уже как некую математическую модель. В зависимости от способов записи графа мы имеем различные формы представления графа: геометрическое, теоретико-множественное, матричное. Таким образом, уже с определения графа студент сталкивается с различными видами математических моделей, описывающих окружающую действительность. Различные виды графов – обыкновенные, ориентированные, взвешенные – не что иное, как различные виды моделей, служащих для описания цепочки усложняющихся моделей связных систем. Каждая из таких усложненных моделей связной системы, служащая для описания какой-либо стороны окружающей действительности, ставит новые задачи и опирается при попытке их решения на различные разделы математики.

Простейшая модель связной системы, представляющая собой совокупность n объектов, между любой парой различных объектов которой установлен факт наличия или отсутствия связи (без уточнения понятия связи), требует дальнейшего моделирования. Так, если мы моделируем объекты точками на плоскости, а наличие связи между парой объектов – линией, соединяющей пару точек, то мы приходим к понятию обыкновенного графа, моделирующего простейшую умозрительную модель связной системы рисунком (геометрическое представление графа).

Если мы моделируем (определяем) объекты связной системы элементами некоторого множества, а наличие связи между парой объектов выделением двухэлементного подмножества, состоящего из соответствующих элементов, то мы приходим к теоретико-множественному представлению обыкновенного графа. Теоретико-множественное представление обыкновенного графа, таким образом, состоит в перечислении элементов множества, моделирующих объекты связной системы, которые в теории графов называются вершинами, и двухэлементных подмножеств, моделирующих наличие связи между парой различных объектов, которые в теории графов называются ребрами. Формально обыкновенный граф, который будем обозначать буквой G, мы можем представить как совокупность двух множеств: множества вершин $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ и множества ребер $R = \{r_1, r_2, ..., r_m\}$, где каждый элемент множества $r_k \in R$ есть некоторое двухэлементное подмножество множества *V*, т.е. $r_k = \{v_i, v_j\}$, где $v_i, v_j \in V$. Теперь можно уточнить и запись обыкновенного графа, его обычно обозначают как G(*V*,*R*).

Вхождение или не вхождение вершины в состав ребра наделяют вершины и ребра различными свойствами по отношению друг к другу. Так две вершины, входящие в состав ребра (образующих ребро), называются смежными, а не образующих ребро – несмежными. Вершина, входящая в состав ребра, называется инцидентной этому ребру, а ребро – инцидентным входящим в его состав вершин. Понятие смежности вершин и инцидентности вершин и ребер приводят к матричным записям обыкновенного графа. Так матрица, построенная из элементов a_{ij}, т.е. матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

где $a_{ii} = 0$; $a_{ij} = 1$, если вершина v_i смежна с вершиной v_j, и $a_{ij} = 0$ в противном случае, называется матрицей смежности графа G(*V*,*R*). Матрица смежности графа, однозначно определяет граф и это представление графа эквивалентно представлению графа рисунком или представлению графа списком вершин и ребер.

Граф можно также записать в виде матрицы *B* с элементами b_{ij}, где $b_{ij} = 1$, если вершина v_i инцидентна ребру r_j, и $b_{ij} = 0$ в противном случае. Матрица *B* называется матрицей инцидентности графа, она однозначно описывает граф, и запись графа через его матрицу инцидентности эквивалентна предыдущим формам записи графа. Различные формы записи графа, по сути, дают нам различные математические модели графа, которые позволяют выявить (описать) различные свойства (особенности) графа.

Укажем ещё одно представление графа, воспользовавшись тем, что в определение графа входит понятие множества. Известно, что наряду с каждым конечным множеством *M* (мы занимаемся конечными графами) можно рассматривать множество всех его подмножеств, обозначаемое как 2^M, которое относительно операции кольцевого сложения (операции симметрической разности) и операции умножения подмножеств на числа 0 и 1 образует векторное пространство над полем по модулю два. Поскольку множество всех подмножеств как таковое нас не интересует, то под обозначением 2^M будем далее понимать указанное выше векторное пространство, образованное множеством *M*. Это векторное пространство конечномерно, поскольку естественным базисом этого пространства служат элементы множества *M*. Оно также конечно. Если положить $|M| = m$, то $\dim 2^M = m$ (размерность пространства), а $|2^M| = 2^m$ (мощность множества подмножеств). Координатным пространством W_M для векторного пространства 2^M будет пространство m-мерных (0,1)-столбцов (столбцов, элементами которых служат числа 0 или 1). В координатном пространстве вводится скалярное произведение над полем по модулю два, как сумма произведений соответствующих элементов столбцов.

Так как граф G(V,R) мы определили как совокупность двух множеств V и R, то мы можем рассмотреть два векторных пространства 2^R и 2^V, а сам граф, как линейное отображение пространства 2^R в пространство 2^V, отображающее каждое ребро в пару инцидентных ему вершин. Действительно, матрицей указанного линейного отображения в естественных базисах пространств 2^R и 2^V будет матрица инцидентности B графа G(V,R), что и дает нам основание отождествлять граф G(V,R) с указанным линейным отображением. Отображению некоторого подмножества $R' \subseteq 2^R$ в подмножество $V' \subseteq 2^V$ в координатных пространствах W_R и W_V соответствует матричное равенство $BX = Y$, где B матрица линейного отображения (матрица инцидентности), X – координатный столбец множества R', а Y – координатный столбец множества V'. Таким образом, зная X, тривиальным образом находится его образ Y. Обратно, зная Y можно найти все его прообразы, решая над полем по модулю два матричное уравнение $BX = Y$ относительно столбца X. Поскольку граф имеет и геометрическое представление в виде рисунка, то студент, мы ориентируемся в первую очередь на него, переходя к геометрической интерпретации решения уравнения $BX = Y$, может не только найти это решение, что над полем по модулю два сделать гораздо легче, но и увидеть это решение (решения). Таким образом, обещанное повторение курса линейной алгебры в теории графов налицо – здесь и построение матриц линейного отображения (напомним что матрица одного и того же отображения зависит от выбора базисов в связанных отображением пространствах), и вся теория и практика решений систем линейных уравнений, но уже над полем по молю два. Последнее означает, что мы не только повторяем основные разделы линейной алгебры на новом материале, но и получаем новые знания. Кроме того, мы даем решениям графовую интерпретацию.

Как известно, решение уравнения $BX = Y$ есть сумма частного решения этого уравнения и общего решения уравнения $BX = 0$. Считая известным определения открытой и замкнутой цепи, простой цепи, цикла (простой замкнутой цепи) мы можем интерпретировать пространство решений уравнения $BX = 0$ как пространство циклов. Фундаментальная система решений этого уравнения соответствует фундаментальной системе циклов в традиционной теории графов. Наиболее интересен случай уравнения $BX = Y$, когда Y является (0,1)-столбцом с двумя единицами, т.е. является координатным столбцом множества из двух вершин. Тогда решение этого уравнения интерпретируется как объединение реберно непересекающихся (не имеющее общих ребер) простой цепи, соединяющей две вершины, определенных столбцом Y, и некоторого числа циклов. Среди графов особо выделяются связные графы, так как любой обыкновенный граф представляется как объединение связных графов (объединение компонент связности). Граф называется связным, если любые две различные вершины графа соединены простой цепью (здесь мы исключаем случай вырожденных графов, имеющих изолированные вершины). На языке решений уравнения $BX = Y$ это определение можно сформулировать так: граф с матрицей инцидентности B будет связным, если уравнение $BX = Y$ со столбцом Y, являющимся координатным столбцом множества из двух различных вершин, всегда разрешимо. Последнее эквивалентно тому, что ранг матрицы B равен $n-1$, где n число вершин графа. Таким образом, перевод графовых определений на язык линейной алгебры над полем по модулю два позволяет конструктивно ответить на вопрос - удовлетворяет ли граф или его подграф тому или иному определению.

Вернемся вновь к определенному выше линейному отображению пространства 2^R в пространство 2^V. Как известно с любым линейным отображением связано два основных подпространства: ядро линейного отображения (в нашем случае подпространство пространства 2^R, которое будем обозначать ker*B*) и подпространства образов (в нашем случае подпространство пространства 2^V, которое будем обозначать im*B*). Элементы этих подпространств имеют свою графовую интерпретацию. Так элементы ядра (ker*B*) мы интерпретировали как линейные комбинации фундаментальных циклов, т.е. ядро нашего отображения является подпространством циклов. Элементы пространства образов (im*B*) суть линейные комбинации любой максимально независимой совокупности столбцов матрицы *B*.

Наряду с рассмотренным линейным отображением пространства 2^R в пространство 2^V мы рассматриваем также линейное отображение пространства 2^V в пространство 2^R, отображающее каждую вершину графа G(*V*,*R*) в множество инцидентных ей ребер. Матрицей этого линейного отображения в естественных базисах пространств 2^V и 2^R будет матрица B^T (транспонированная матрица инцидентности), следовательно, и это линейное отображение можно отождествить с графом. Ядро этого линейного отображения будем обозначать как $\ker B^T$, а подпространство образов как $\operatorname{im} B^T$. Ясно, что $\ker B^T \subset 2^V$, а $\operatorname{im} B^T \subset 2^R$. Элементы пространства $\ker B^T$ интерпретируются как комбинации компонент связности графа G(*V*,*R*), которые находятся из решения уравнения $B^T Y = 0$. Пространство $\operatorname{im} B^T$ интерпретируется как пространство разрезов. Таким образом, выясняется, что каждое из пространств 2^V и 2^R содержит по два подпространства: пространство ребер (2^R) содержит подпространство циклов (ker*B*) и подпространство разрезов ($\operatorname{im} B^T$); пространство вершин (2^V) содержит подпространства $\ker B^T$ и im*B*. Методами линейной алгебры легко показывается, что подпространство циклов и подпространство разрезов ортогональны между собой. Аналогично устанавливается, что подпространства $\ker B^T$ и im*B* ортогональны между собой. Доказательство этих фактов методами традиционной теории графов затруднительно.

Достаточно очевидно, что обыкновенный граф можно задать как линейный оператор, действующий в пространстве вершин и отображающий каждую вершину в совокупность смежных с ней вершин. В этом случае матрицей оператора в естественном базисе пространства вершин будет матрица смежности *A*. Несложно показать, что матрица *A* равна произведению матрицы *B* на B^T после обнуления диагональных элементов в этом произведении.

Можно также рассмотреть линейный оператор, действующий в пространстве ребер графа G(*V*,*R*) и отображающий каждое ребро в совокупность смежных с ним ребер. Матрицей этого оператора будет так называемая матрица реберной смежности графа G, или, по-другому, матрицей смежности реберного графа L(G) (традиционное обозначение). Эта матрица равна произведению $B^T B$ после полагания в нем нулю диагональных элементов (если умножение матриц производить в поле по модулю два – то в точности этому произведению).

Мы не можем в рамках этой статьи развивать дальше содержание алгебраической теории графов. Выше мы подчеркнули «алгебраичность» теории графов и важность её преподавания на факультете с точки зрения единства математических дисциплин.

Подчеркнем теперь важность её преподавания с точки зрения развития науки. Наука развивается, когда решает поставленные ранее трудные задачи. Известно, что решение задачи во многом зависит от удачной (понятной) её формулировки. Алгебраический подход к теории графов позволяет более понятно формулировать поставленные ранее трудные «графовые» задачи. Так, исходя из того, что матрица смежности A графа G есть матрица линейного оператора в конкретном базисе, и что при переходе к другому базису матрица меняется по определенному закону, легко формулируется проблема изоморфизма графов, что позволяет продвинуться в решении этой проблемы. Формулировки трудных проблем на понятном для студентов языке (на языке преподаваемых им предметов) позволяют привлекать их к решению трудных задач, т.е. привлекать к науке. Среди трудных задач теории графов можно также назвать следующие, так называемые, NP-трудные задачи: раскраска вершин и ребер графа в минимальное число цветов (вершинная и реберная раскраска графа), выделение в графе наибольшего числа несмежных между собой вершин (ребер), нахождение минимального множества вершин (ребер) инцидентных всему множеству ребер (вершин) (так называемые задачи «покрытия») и т.д. Все они достаточно просто формулируются как на языке традиционной теории графов, так и на языке алгебраической теории графов.

Алгебраическая теория графов подталкивает также к выделению линейной алгебры над полем по модулю два (или шире – над конечными полями) в самостоятельный раздел, что тоже связано с развитием науки.

Заключение. Надеемся, что этой статьей нам удалось привлечь внимание к преподаванию алгебраической теории графов. Мы понимаем, что алгебраический подход к теории графов не единственный и не охватывает всего многообразия задач теории графов. Понимаем также его недостатки – в первую очередь, некоторая отстраненность от сугубо компьютерных методов и технологий реализации алгоритмов решения задач. Понимаем трудности, связанные с решением графовых задач для графов большой размерности при алгебраическом подходе к теории графов. Тем не менее …

Хитров Г.М.