Лекция по вопросу 47

1 Уравнения Максвелла в интегральной и дифференциальной формах. Граничные условия.

Рассмотрим основные положения теории электромагнитных явлений. Что же лежит в основе электродинамики, как теоретической науки?

- *Полевые уравнения, описывающие связь между источниками поля и характеристиками поля.*

  Эти уравнения (в дифференциальной или интегральной форме) могут быть записаны как для силовых характеристик (векторов напряженностей, индукции), так и энергетических (скалярных и векторных потенциалов). В основе любых форм уравнений и их модификаций лежат уравнения Максвелла.

- *Уравнения связи характеристик материальных объектов (среды) с характеристиками источников поля.*

- *Уравнения движения материальных объектов, порождаемого электромагнитным полем.* При этом электромагнитное поле рассматривается как суперпозиция внешнего управляющего) поля и собственного поля, порождаемого самими материальными объектами в процессе своего движения. То есть кроме внешнего поля на объекты (частицы, сплошная среда) действует согласованное с их движением собственное поле ими порожденное. В этом случае говорят о *самосогласованном движении.*

Итак, рассмотрим вкратце эти уравнения и связи.

1.1 Полевые уравнения

Как известно, полевые уравнения электродинамики могут быть записаны в двух формах:

локальной, справедливой в бесконечно-малой окрестности рассматриваемой точки пространства-времени, в виде дифференциальных уравнений в частных производных и

нелокальной, в виде интегральных уравнений, справедливость которых утверждается для конечных областей пространства и ограничивающих их поверхностей и линий.

Физика — наука опытная. В ее фундаменте лежат экспериментальные законы, достоверность которых установлена и принимается научным сообществом на данный момент времени и для определенного набора исходных данных и предположений.

Рассмотрим хорошо известный закон Кулона, справедливость которого установил Шарль Огюстен Кулон в 1785 году с помощью крутильных весов. В современной записи этот закон имеет следующий вид

$$\mathbf{F}_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{r^3},$$

где $\mathbf{F}_2$ — сила, действующая на заряд q_2 со стороны заряда q_1, $\mathbf{r}$ — радиус вектор, проведенный из точки расположения заряда q_1 в точку расположения заряда q_2, ε_0 — некоторая постоянная, равная $10^7/4\pi c^2$ *ф/м* в системе МКС, c — скорость распространения плоских электромагнитных волн в свободном пространстве. Для положительного пробного заряда можно написать следующее соотношение

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{r^3},$$

которое определяет электрическое поле $\mathbf{E}$ в точке $\mathbf{r}$, созданное зарядом, расположенном в начале координат. Теорему Гаусса о потоке вектора (вектора электрической напряженности) можно записать в виде

$$\int\limits_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}. \tag{1}$$

Этот закон легко может быть выведен из закона Кулона!

Из экспериментов известно, что статическое электрическое поле обладает свойством консервативности, то есть работа, совершаемая по переносу заряда в таком поле не зависит от формы пути, а только от начальной и конечной точек этого перемещения. Можно показать (с учетом определения работы и вектора электрической напряженности), что математически это требование можно записать в виде следующего интегрального равенства

$$\oint\limits_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0. \tag{2}$$

Это равенство "говорит", что работа по замкнутому контуру *равна нулю.*

Эксперименты классической физики позволили утверждать, что в природе не существует магнитных зарядов. Вообще говоря и современная физика микромира также не обнаружила монополей — магнитных зарядов. Математически это можно записать (теорема Гаусса для магнитного поля) с помощью следующего интегрального уравнения

$$\int\limits_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int\limits_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV = 0. \tag{3}$$

Опыты Фарадея, а затем и Ампера, позволили записать следующее уравнение для магнитного поля, порождаемого некоторым полным током $\mathbf{J}_{\text{полн}}$, охватываемым контуром L:

$$\oint\limits_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \mathbf{J}_{\text{полн}}. \tag{4}$$

Используя математические соотношения (теорему Остроградского–Гаусса) получим

$$\oint\limits_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int\limits_S \nabla \times \mathbf{B} d\sigma = \mu_0 \int\limits_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}. \tag{5}$$

Здесь мы выразили полный ток через поверхностный интеграл от плотности тока $\mathbf{j}$.

По сути дела уравнения (1)–(5) и составляют уравнения Максвелла в интегральной форме в вакууме.

Что можно сказать по поводу приведенных уравнений:

1) Уравнения (1)–(5) не локальны, т.е. справедливы в некоторой конечной области. Именно в такой форме они могут быть проверены экспериментально.

2) Функции, входящие в уравнения,должны быть интегрируемы в соответствующей метрике.

Перейдем теперь к обсуждению уравнений Максвелла в дифференциальной форме. Все они являются следствиями интегральных уравнений, получаемые в результате предельного перехода к бесконечномалым объемам и соответствующим границам.

Еще раз выпишем дифференциальные уравнения электродинамики – *уравнения Максвелла*:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_{\text{полн.}} = .\frac{1}{\varepsilon_0}\left(\rho_{\text{своб.}} - \nabla \cdot \mathbf{P}\right), \tag{6}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{7}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{8}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{j}_{\text{своб.}} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right). \tag{9}$$

Эти уравнения справедливы для покоящейся среды. Ограничение покоящимися средами обусловлено отсутствием конвекционных (конвективных) токов, а также тем, что при выводе уравнения (3) мы пренебрегли изменениями потока из-за движения среды. В уравнения (1)–(4) в явном виде входят эквивалентные вакуумные заряды и токи, приводящие к возникновению полей. Если, как и ранее, ввести дополнительные векторные поля

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \tag{10}$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}, \tag{11}$$

то уравнения Максвелла принимают вид

$$1. \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{своб.}}, \tag{12}$$

$$2. \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{13}$$

$$3. \quad \nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{14}$$

$$4. \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_{\text{своб.}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \tag{15}$$

Чисто внешне уравнения (7)–(10) много проще, чем уравнения (3), однако с физической точки зрения они сложнее. Уравнения (7–10) не образуют замкнутую систему.

1.2 Уравнения связи характеристик материальных объектов (среды) с характеристиками источников поля

Для замыкания системы уравнений необходимо наложить дополнительные связи — уравнения состояния, связывающие **D** и **j** с **E** и **H** с **B**. В случае среды с линейными характеристиками эти уравнения имеют простой вид: Заметим, что для линейных сред уравнения (12) допускают применение принципа суперпозиции. В этом случае уравнения Максвелла принято считать линейными.

$$1. \quad \mathbf{D} = k\varepsilon_0 \mathbf{E}, \tag{16}$$

$$2. \quad \mathbf{j}_{\text{своб.}} = \sigma \mathbf{E} \quad \text{закон Ома} \tag{17}$$

$$3. \quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0}. \tag{18}$$

Если среда нелинейным образом реагирует на помещение ее во внешнее электромагнитное поле, то уравнения состояния имеют более сложный вид.

Задача становится существенно сложнее в случае, если среда, реагирующая на внешнее поле, движется. В этом случае уравнение (5) приобретает дополнительный член, ответственный за движение среды:

$$\nabla \times \mathbf{E}' = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times [\mathbf{B} \times \mathbf{u}], \tag{19}$$

где $\mathbf{E}'$ поле, измеренное в системе отсчета, связанной с движущейся со скоростью $\mathbf{u}$ средой. Перепишем данное выражение иначе

$$\nabla \times (\mathbf{E}' - [\mathbf{u} \times \mathbf{B}]) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{20}$$

В левой части последнего уравнения стоит вектор напряженности $\mathbf{E}$, измеренного в неподвижной (лабораторной систем координат). Действительно, согласно формуле Лоренца на заряд, движущийся в магнитном поле с вектором индукции $\mathbf{B}$ в дополнение к силе $q\mathbf{E}$, действующей со стороны электрического поля $\mathbf{E}$, действует дополнительная сила, равная $q\,[\mathbf{B} \times \mathbf{u}]$. Таким образом, для неподвижного наблюдателя мы получаем соотношение, полностью аналогичное (5), где $\mathbf{E}$ напряженность электрического поля, измеренная в лабораторной системе отсчета. Иными словами, дифференциальная форма закона Фарадея не зависит от движения среды. Этого и следовало ожидать, так как закон Фарадея зависит только от векторов $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$, и поэтому он не должен зависеть от характеристик среды, в том числе и от ее движения. Само же поле состоит из двух слагаемых: первое слагаемое описывает поле индукции $\mathbf{E}_1$, вызванного изменением магнитного поля во времени, и второй части $\mathbf{E}_2$ — поля, возникающего вследствие движения наблюдателя в магнитном поле.

З а м е ч а н и е 1. Здесь мы предполагали, что электрическое поле не зависит от скорости движения. Такое предположение справедливо лишь приближенно, и справедливо при малых (по сравнению со скоростью света) скоростях движения $|\mathbf{u}| = u \ll c$. При релятивистских скоростях движения $|\mathbf{u}| = u \approx c$ мы должны ввести соответствующие изменения в наши выкладки (см. ниже). ♣

С учетом сделанных замечаний нам необходимо "подправить только четвертое уравнение Максвелла, добавив в правую часть слагаемые, ответственные за движение среды:

$$\left\{\begin{array}{ll} 1. & \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{своб.}}, \\ 2. & \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \\ 3. & \nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ 4. & \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{j}_{\text{своб.}} + \rho_{\text{своб.}}\mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \nabla \times [\mathbf{P} \times \mathbf{u}]\right). \end{array}\right. \tag{21}$$

1.3 Уравнения движения

Под уравнениями движения мы будем понимать уравнения, описывающие перемещение материальных объектов в пространстве и изменение их взаимного расположения (деформация среды). Очевидно, что эти уравнения полностью совпадают и с известными уравнения динамики материальных объектов и сплошной среды. Для материальных точек в качестве таких уравнений выступают уравнения Ньютона–Лоренца

$$\left\{\begin{array}{lcl} \frac{d\mathbf{P}}{dt} & = & q \cdot (\mathbf{E} + [\ \times \mathbf{B}])\,, \\ \frac{d\mathbf{X}}{dt} & = & \mathbf{V}, \quad \mathbf{P} = m\mathbf{v}. \end{array}\right. \tag{22}$$

где $\mathbf{X}$, $\mathbf{P}$ — вектор пространственных координат (в выбранной системе координат) и механический (не обобщенный) импульс частиц.

Уравнения движения среды в общем виде имеет очень сложный вид, который может существенно упрощаться при различных дополнительных предположения о свойствах среды (однородность, изотропность, упругость и т.д. и т.п.).

1.4 Граничные условия

Для решения уравнений Максвелла, как в интегральной, так и в дифференциальной форме, необходимо задать граничные, а при необходимости и начальные условия (для нестационарных задач).

В дальнейшем для построения математической модели электромагнитного поля нам необходимо рассматривать граничные условия на искомые функции. Очевидно (с учетом сделанных выше замечаний), что для адекватного описания граничных условий нам необходимо воспользоваться разделением источников на связанные и свободные и установить соотношения между полями связанных и свободных зарядов. Эти соотношения определяются свойствами вещества, в котором проявляют себя связанные заряды.

Рассмотрим случай, когда граничной поверхностью служит поверхность раздела двух сред с различными значениями диэлектрической проницаемости.

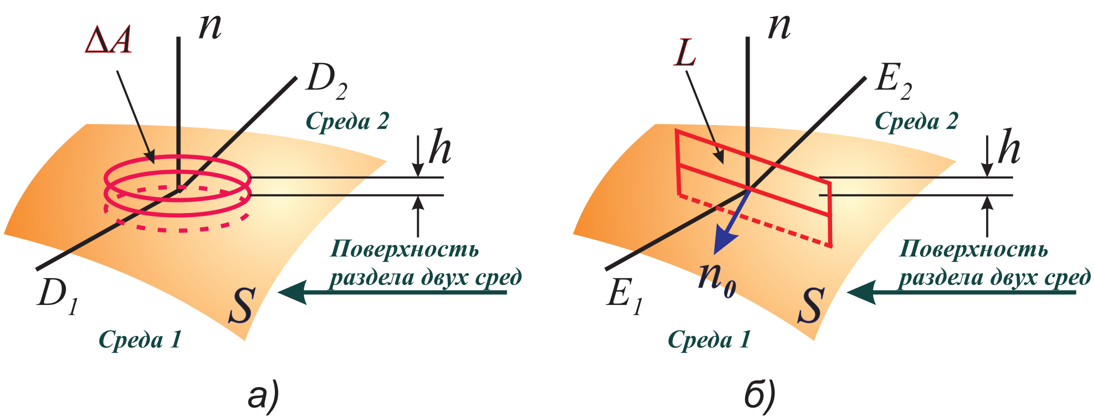

Рис. 1. Схема для вывода граничных условий: *а* — для вектора индукции **D**, *б* — для вектора напряженности **E**.

На рис. 1 *а* приведена схема для вывода граничных условий для нормальных компонент вектора **D** в точке поверхности раздела сред. Здесь $\mathbf{D}_1$ и $\mathbf{D}_2$ — значения электрической индукции в средах 1 и 2 соответственно, ΔA — малая площадка на поверхности раздела сред, содержащая исследуемую точку. На этой площадке построим цилиндр с основаниями, параллельными границе раздела и лежащими в средах 1 и 2 соответственно. Высота цилиндра равна h. На рис. 1*б* приведена схема для вывода граничных условий для тангенциальных компонент вектора напряженности электрического поля **E**. Здесь $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ — значения вектора напряженности электрического поля в средах 1 и 2 соответственно, L — малый контур, со сторонами, лежащими в средах 1 и 2. Применим равенство (18) для цилиндра, изображенного на рис. 1*a*. Интеграл в левой части равенства (18) представим в виде суммы трех интегралов (по двум основаниям цилиндра и по боковой стороне цилиндра). Заряд q, охваченный поверхностью цилиндра, вычислим по формуле $q = \sigma\Delta A$, где σ — плотность свободных зарядов на поверхности раздела. Воспользуемся теоремой о среднем и устремим h к нулю, стягивая одновременно площадку ΔA к исследуемой точке поверхности раздела. В результате из уравнения (18) следует

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma, \tag{19}$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор, нормальный поверхности раздела в точке, где наблюдаются вектора $\mathbf{D}_1$ и $\mathbf{D}_2$. Полагая $\varepsilon_1 = 1 + \chi_1$, $\varepsilon_2 = 1 + \chi_2$ и учитывая формулу (17), получим

$$\mathbf{n} \cdot (\varepsilon_2 \mathbf{E}_2 - \varepsilon_1 \mathbf{E}_1) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \quad \text{или} \quad \mathbf{n} \cdot (\varepsilon_2 \nabla\varphi_2 - \varepsilon_1 \nabla\varphi_1) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \tag{20}$$

Если применить равенство (8) к замкнутому контуру на рис. 2*б* и устремить короткие стороны к нулю ("толщина"слоя стремится к нулю), то получим

$$\mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l} - \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l} = 0.$$

Так как $d\mathbf{l}/dl = \mathbf{n}_0 \times \mathbf{n}$ ($\mathbf{n}_0$ — единичный вектор, нормальный к нашему контуру (смотри рис. 2*б*), то

$$\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0.$$

Поскольку данное соотношение справедливо при любой ориентации контура, то окончательно получаем

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0, \tag{21}$$

т.е. тангенциальные составляющие вектора $\mathbf{E}$ одинаковы по обе стороны границы раздела. Выразим поля через потенциалы:

$$\mathbf{n} \times (\nabla\varphi_2 - \nabla\varphi_1) = 0. \tag{22}$$

З а м е ч а н и е 2. В случае не статических полей, когда $\mathrm{rot}\mathbf{E} \neq 0$, тангенциальная составляющая терпит разрыв на границе раздела двух сред. Об этом, в частности, следует помнить при решении задач распространения электромагнитных волн в волноводах.

Из уравнения (22) можно сделать заключение, что $\varphi_1 = \varphi_2$. Кроме того, нормальная компонента вектора $\nabla\varphi$ непрерывна, если на поверхности раздела нет особенности в виде заряженного слоя.

1.5 Краевые задачи для уравнений магнитостатики

Краевые задачи в случае магнитных сред можно ставить и решать как для скалярного потенциала φ, так и для магнитного векторного потенциала $\mathbf{A}$.

Однако, если истинные токи, создающие магнитное поле, лежат вне интересующей нас области, то такие задачи лучше решать с помощью скалярного магнитного потенциала. В этом случае граничные условия выражаются через скалярный потенциал и оказываются полностью аналогичными электрическим граничным условиям, разве что необходимо заменить диэлектрическую постоянную ε на магнитную восприимчивость μ.

В некоторых случаях токи намагничения трудно заменить эквивалентными дипольными поверхностями, поэтому в таких случаях более предпочтительным является аппарат, основанный на магнитном потенциале $\mathbf{A}$. Напомним, что, если область с токами занимает в пространстве ограниченную область, то потенциал $\mathbf{A}$ определяется единственным образом. Однако необходимо заметить, что вообще говоря векторный потенциал определяется с точностью до произвольного безвихревого вектора, то есть добавляя к $\mathbf{A}$ член $\nabla \cdot f(\mathbf{X})$ мы не изменяем значение величины магнитной индукции.

Уравнение для векторного потенциала в результате некоторых выкладок может быть записано в виде

$$\nabla^2\mathbf{A} = -\mu_0\mathbf{j}.$$

Это уравнение представляет собой векторную форму уравнения Пуассона. Естественно, что векторное уравнение Пуассона сложнее его скалярного аналога. Это связано с тем обстоятельством, что компоненты вектора $\mathbf{A}$ не независимы! Это приводит к невозможности разложить каждую компоненту $\mathbf{A}$ в ряд по некоторому базису, коэффициенты которого определяются из достаточного числа граничных условий. Для устранения этого не очень приятного момента обычно используют условие $\nabla\mathbf{A} = 0$ таким образом, чтобы "занулить" одну из компонент вектора $\mathbf{A}$. можно показать, что такое представление существует, однако оно зависит от системы координат, в которой мы рассматриваем нашу задачу.