

Вопрос 43 Уравнения движения и основные законы динамики материальной точки и механической системы

Уравнения движения механической системы

Здесь термином механическая или материальная система мы называем конечное множество материальных точек.

Силы взаимодействия между материальными точками механической системы называют *внутренними силами*. Силы, действующие на материальные точки системы, вызванные материальными объектами, не входящими в состав рассматриваемой механической системы, называют *внешними силами*.

Геометрическую сумму всех внешних (внутренних) сил, действующих на материальную точку, называют *главным вектором внешних (внутренних) сил, действующих на эту точку*. Главные векторы внешних и внутренних сил, действующих на материальную точку M_j , обозначим символами \vec{F}_j и \vec{F}'_j соответственно, а массу этой точки обозначим m_j . Выписывая для всех точек механической системы уравнение Ньютона получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$m_j \ddot{\vec{r}}_j = \vec{F}_j(\vec{r}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_1, \dots, t) + \vec{F}'_j(\vec{r}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_1, \dots, t)$, которые называют *уравнениями движения механической системы*. Когда говорят об уравнениях Ньютона, то имеют в виду именно эти уравнения, описывающие движение механической системы в пространстве E^3 , но не обязательно в инерциальной системе координат. Как в случае инерциальной, так и в случае неинерциальной системы координат, запись уравнений движения механической системы в этом виде предполагает выполнение второго и третьего закона Ньютона. Это предположение является неотъемлемой составной частью механики Ньютона.

Вместо громоздких обозначений $\vec{F}_j(\vec{r}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_1, \dots, t)$, $\vec{F}'_j(\vec{r}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_1, \dots, t)$ будем использовать обозначения \vec{F}_j , \vec{F}'_j соответственно.

Основные законы динамики механической системы

Теорема об изменении главного вектора количества движения Введем в рассмотрение векторы

$$\vec{F} = \sum_j \vec{F}_j, \quad \vec{F}' = \sum_j \vec{F}'_j, \quad \vec{Q} = \sum_j m_j \vec{v}_j,$$

где $\vec{v}_j = \dot{\vec{r}}_j$ - скорость точки M_j . Эти векторы называют соответственно *главным вектором внешних сил*, *главным вектором внутренних сил* и *главным вектором количества движения механической системы*. Согласно третьему закону Ньютона, лю-

бой внутренней силе механической системы отвечает другая внутренняя сила, уравновешивающая первую, поэтому $\vec{F}' = \vec{0}$.

Теорема (об изменении главного вектора количества движения) : $\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}$, $d\vec{Q} = \vec{F}dt$, $\vec{Q} - \vec{Q}_0 = \int_{t_0}^t \vec{F}dt$

Доказательство Ясно, что в этих равенствах представлены три равносильных варианта записи одной и той же формулы, а первую из формул мы получим, если просуммируем уравнения Ньютона для материальной точки M_j по всем j и учтем, что $\vec{F}' = \vec{0}$. Что и требовалось.

Векторы $\vec{F}dt$, $\int_{t_0}^t \vec{F}dt$ называют элементарным импульсом силы и импульсом силы (на промежутке $[t_0, t]$) соответственно, поэтому эту теорему можно сформулировать в любом из следующих вариантов:

- производная главного вектора количества движения механической системы равна главному вектору сил;
- дифференциал главного вектора количества движения механической системы равен элементарному импульсу силы;
- приращение главного вектора количества движения механической системы равно импульсу силы

Уравнение движения центра инерции

Центр масс (или центр инерции) – это точка C , радиус-вектор \vec{r}_c которой (относительно некоторой точки O) определяется формулой: $m\vec{r}_c = \sum_j m_j \vec{r}_j$, $m = \sum_j m_j$, где \vec{r}_j – радиус-вектор точки M_j относительно точки O . Дифференцируя первое из этих равенств по t , получаем $m\dot{\vec{r}}_c = \vec{Q}$. Дифференцируя это равенство по t и учитывая теорему об изменении главного вектора количества движения, приходим к уравнению: $m\ddot{\vec{r}}_c = \vec{F}$.

Этот результат формулируют обычно в виде теоремы.

Теорема (о движении центра масс)

Центр масс механической системы движется так, как двигалась бы материальная точка с массой m , равной сумме масс всех точек системы, под действием силы, равной сумме сил, действующих на эти точки

Следствие

Если сумма всех сил, действующих на точки механической системы, равна нулю, то центр масс системы движется прямолинейно и равномерно

Кинетический момент относительно неподвижной точки и теорема о его изменении

Если O, M - точки аффинного пространства и $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, то закрепленный вектор $\mu_0(M, \vec{G}) = (O, \vec{r} \times \vec{G})$ называют моментом закрепленного вектора (M, \vec{G}) относительно точки O . Ради краткости, этот вектор записывают также $\vec{r} \times \vec{G}$ и называют моментом вектора \vec{G} , предполагая, что точки O, M известны по умолчанию. Как и ранее, символами $\vec{r}_j = \overrightarrow{OM_j}$, $\vec{v}_j = \dot{\vec{r}}_j$, m_j обозначим радиус-вектор, скорость и массу материальной точки M_j , а символами \vec{F}'_j и \vec{F}_j - главные векторы внутренних и внешних сил, действующих на точку M_j .

Векторы $\vec{M}' = \sum_j \vec{r}_j \times \vec{F}'_j$, $\vec{M} = \sum_j \vec{r}_j \times \vec{F}_j$, $\vec{K} = \sum_j \vec{r}_j \times m_j \vec{v}_j$ называют главным моментом соответственно внутренних сил, внешних сил и количества движения механической системы (относительно неподвижной точки O). Последний вектор называют также кинетическим моментом механической системы (относительно неподвижной точки O).

Теорема Главный момент \vec{M}' внутренних сил механической системы равен нулю

Доказательство Так как $\vec{F}'_j = \sum_{i \neq j} \vec{F}'_{j,i}$, $\vec{F}'_{j,i} = -\vec{F}'_{i,j}$, где $\vec{F}'_{j,i}$ - сила действия точки M_i на M_j , и $(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}'_{i,j} = \vec{0}$, то получаем:

$$\vec{M}' = \sum_j \vec{r}_j \times \vec{F}'_j = \sum_j (\vec{r}_j \times \sum_{i \neq j} \vec{F}'_{j,i}) = \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} (\vec{r}_i \times \vec{F}'_{i,j} + \vec{r}_j \times \vec{F}'_{j,i}) = \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}'_{i,j} = \vec{0}$$

Теорема (Об изменении кинетического момента)

Производная кинетического момента механической системы относительно неподвижной точки равна главному моменту внешних сил относительно той же точки, то есть $\frac{d}{dt} \vec{K} = \vec{M}$ Доказательство

Рассмотрим дифференциальные уравнения Ньютона движения механической системы: $m_j \frac{d}{dt} \vec{v}_j = \vec{F}_j + \vec{F}'_j$. Умножая j -ое уравнение слева векторно на \vec{r}_j и суммируя полученные равенства по всем j , получаем: $\sum_j \vec{r}_j \times \frac{d}{dt} (m_j \vec{v}_j) = \sum_j \vec{r}_j \times \vec{F}_j$. Дифференцируя \vec{K} по t и используя это равенство и равенства

$\frac{d}{dt} \vec{r}_j = \vec{v}_j$, $\frac{d}{dt} (\vec{r}_j \times \vec{v}_j) = \vec{r}_j \times \frac{d}{dt} \vec{v}_j$, приходим к доказываемому равенству.

Изменение кинетического момента, вычисляемого относительно подвижного полюса

Символами $\vec{r}_A, \vec{v}_A, \vec{w}_A$ обозначим радиус-вектор, скорость и ускорение некоторой точки $A = A(t) \in E^3$, движущейся относительно некоторого репера с началом в точке O , и введем в рассмотрение величины: $\vec{M}_A = \sum_j (\vec{r}_j - \vec{r}_A) \times \vec{F}_j$, $\vec{K}_A = \sum_j (\vec{r}_j - \vec{r}_A) \times m_j (\vec{v}_j - \vec{v}_A)$. Вектор-функции \vec{M}_A , \vec{K}_A называют главным моментом соответственно внешних сил и количества движения механической системы относительно подвижного полюса A . Последний вектор называют также кинетическим моментом механической системы относительно подвижного полюса A .

Теорема (Об изменении кинетического момента)

Производная кинетического момента механической системы относительно подвижного полюса A и ее главный момент внешних сил относительно того же полюса связаны равенством:

$$\frac{d}{dt} \vec{K}_A + m(\vec{r}_c - \vec{r}_A) \times \vec{w}_A = \vec{M}_A$$

Доказательство Так как

$\vec{K}_A = \vec{K} - \sum_j m_j \vec{r}_j \times \vec{v}_A - \vec{r}_A \times \sum_j m_j (\vec{v}_j - \vec{v}_A) = \vec{K} - \vec{r}_A \times \vec{Q} - m(\vec{r}_c - \vec{r}_A) \times \vec{v}_A$, то, подставляя $\vec{K} = \vec{K}_A + \vec{r}_A \times \vec{Q} + m(\vec{r}_c - \vec{r}_A) \times \vec{v}_A$ в равенство $\frac{d}{dt} \vec{K} = \vec{M}$ получа-

ем: $\frac{d}{dt} \vec{K}_A = \vec{M} - \vec{v}_A \times \vec{Q} - \vec{r}_A \times \dot{\vec{Q}} - m\vec{v}_c \times \vec{v}_A - (\vec{r}_c - \vec{r}_A) \times \vec{w}_A$. Используя здесь формулы $\vec{M} = \sum_j \vec{r}_j \times \vec{F}_j$, $\dot{\vec{Q}} = \sum_j \vec{F}_j$, $m\vec{v}_c = \vec{Q}$, доказываем теорему.

Следствие Если при любом t полюс $A = A(t)$ совпадает с центром масс системы или движется прямолинейно и равномерно, то доказанное равенство совпадает по форме с аналогичной теоремой относительно неподвижного полюса.

Работа силы и изменение кинетической энергии материальной точки

Рассмотрим уравнение движения в E^3 материальной точки M массы m , на которую действует сила \vec{F} : $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$ и пусть $v = |\vec{v}|$, а $T = mv^2/2$ - кинетическая энергия материальной точки M . Умножая это уравнение скалярно на $d\vec{r}$, получаем равенство: $dT = \vec{F} d\vec{r}$. Мы получили, что дифференциал кинетической энергии материальной точки равен элементарной работе главного

вектора сил, приложенных к этой точке. Это равенство называют теоремой об изменении кинетической энергии материальной точки в дифференциальной форме.

Вместо этого равенства, записанного в терминах бесконечно малых величин, можно, разделив его на dt , получить равенство относительно конечных величин: $\frac{dT}{dt} = \vec{F} \vec{v}$.

Пусть $M_0 = M(t_0)$, $M = M(t)$ при $t > t_0$, а $\widehat{M_0M}$ — дуга траектории между этими положениями рассматриваемой материальной точки. Символами X, Y, Z обозначим координаты вектора \vec{F} в рассматриваемом репере (их называют компонентами силы \vec{F} в этом репере). Считая траекторию точки и силу на траектории кусочно-гладкими и взяв криволинейный интеграл от равенства $dT = \vec{F} d\vec{r}$ по дуге $\widehat{M_0M}$, получаем:

$$T - T_0 = A, \quad A = \int_{\widehat{M_0M}} \vec{F} d\vec{r} = \int_{\widehat{M_0M}} (Xdx + Ydy + Zdz), \quad (*)$$

где $T_0 = T|_{t=t_0}$. Величину A называют работой по перемещению материальной точки под действием силы \vec{F} из точки M_0 в точку M вдоль дуги $\widehat{M_0M}$.

Если задать дугу $\widehat{M_0M}$ в параметрической форме, то есть если \vec{r} задать как функцию какого-то параметра, то работу можно записать как определенный интеграл по этому параметру. В качестве параметра обычно используют время t или естественную координату s . Выпишем соответствующие формулы:

$$A = \int_{t_0}^t \vec{F} \vec{v} dt, \quad A = \int_{s_0}^s \vec{F} \vec{\tau} ds = \int_{s_0}^s F \cos \angle(\vec{F}, \vec{v}) ds, \quad \text{где } F = |\vec{F}|, \quad \text{а } \vec{\tau} = \vec{v}/v.$$

Первая из этих формул получается, например, интегрированием равенства $\frac{dT}{dt} = \vec{F} \vec{v}$ по t от t_0 до t , а вторую можно получить из первой заменой t на s с учетом формул $ds/dt = v$, $d\vec{r}/ds = \vec{\tau}$. Еще проще вторую формулу можно получить из (*) заменив $d\vec{r}$ на $\vec{\tau} ds$, а интеграл по дуге на определенный интеграл по s от s_0 до s .

Производную $N = \frac{dA}{dt} = \vec{F} \vec{v}$ называют мощностью и говорят, что мощность характеризует интенсивность выполнения работы A силой \vec{F} . Используя понятие мощности и равенство $\frac{dT}{dt} = \vec{F} \vec{v}$ можно сказать, что производная кинетической энергии мате-

риальной точки равна мощности работы, выполняемой главным вектором сил, действующих на эту точку. Это еще одна формулировка теоремы об изменении кинетической энергии материальной точки.

Теорема об изменении кинетической энергии механической системы

Рассмотрим движение относительно репера $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ в E^3 механической системы из конечного числа точек M_j , имеющих массы m_j и, как и ранее, обозначим символами $\vec{r}_j, \vec{v}_j, v_j, T_j$, положение, скорость, величину скорости и кинетическую энергию точки M_j , а символом T – кинетическую энергию всей механической системы.

Главные векторы внешних и внутренних сил, действующих на материальную точку M_j , обозначим символами \vec{F}_j и \vec{F}'_j соответственно, а символами $X_j, Y_j, Z_j, X'_j, Y'_j, Z'_j$ обозначим координаты этих векторов в рассматриваемом репере. Кроме того, будем использовать обозначения $M_{j,0} = M_j(t_0)$, $M_j = M_j(t)$ при $t > t_0$, а символом $\overline{M_{j,0}M_j}$ обозначим дугу траектории между этими положениями материальной точки M_j .

Обратимся к дифференциальным уравнениям Ньютона движения механической системы:

$$m_j \frac{d}{dt} \vec{v}_j = \vec{F}_j + \vec{F}'_j \quad (1)$$

Используя эти уравнения по отдельности, для каждой точки M_j можно получить равенства, аналогичные равенствам, выражающим различные формулировки теоремы об изменении кинетической энергии материальной точки. Суммируя каждое из них по всем точкам, то есть по всем j , получаем:

$$dT = \delta A + \delta' A, \quad \delta A = \sum_j \vec{F}_j d\vec{r}_j, \quad \delta' A = \sum_j \vec{F}'_j d\vec{r}_j, \quad (2)$$

$$\frac{dT}{dt} = \sum_j \vec{F}_j \vec{v}_j + \sum_j \vec{F}'_j \vec{v}_j, \quad (3)$$

$$T - T_0 = A + A'$$

$$A = \sum_j A_j, \quad A_j = \int_{\overline{M_{j,0}M_j}} \vec{F}_j d\vec{r}_j = \int_{\overline{M_{j,0}M_j}} (X_j dx_j + Y_j dy_j + Z_j dz_j), \quad (4)$$

$$A' = \sum_j A'_j, \quad A'_j = \int_{\overline{M_{j,0}M_j}} \vec{F}'_j d\vec{r}_j = \int_{\overline{M_{j,0}M_j}} (X'_j dx_j + Y'_j dy_j + Z'_j dz_j)$$

$$A_j = \int_{t_0}^t \vec{F}_j \vec{v}_j dt, \quad A_j = \int_{S_{j,0}}^{S_j} \vec{F}_j \vec{\tau}_j ds_j = \int_{S_{j,0}}^{S_j} F_j \cos \angle(\vec{F}_j, \vec{v}_j) ds_j$$

$$A'_j = \int_{t_0}^t \vec{F}'_j \vec{v}_j dt, \quad A'_j = \int_{S_{j,0}}^{S_j} \vec{F}'_j \vec{\tau}_j ds_j = \int_{S_{j,0}}^{S_j} F'_j \cos \angle(\vec{F}'_j, \vec{v}_j) ds_j$$

$$N = \frac{dA}{dt} + \frac{dA'}{dt} = \sum_j \vec{F}_j \vec{v}_j + \sum_j \vec{F}'_j \vec{v}_j \quad (6)$$

Обсудим эти равенства. Величина δA (величина $\delta' A$) равна сумме элементарных работ главных векторов внешних (внутренних) сил, приложенных к точкам механической системы. Равенство (2) называют теоремой об изменении кинетической энергии механической системы в дифференциальной форме. Первое из равенств (4) называют теоремой об изменении кинетической энергии механической системы в конечной (интегральной) форме.

Величину N называют мощностью и говорят, что мощность характеризует интенсивность выполнения работы $A + A'$ внутренними и внешними силами, действующими на точки механической системы. Используя понятие мощности и равенство (3) можно сказать, что производная кинетической энергии механической системы равна мощности работы, выполняемой главными векторами внешних и внутренних сил, действующих на все точки этой системы. Это еще одна формулировка теоремы об изменении кинетической энергии механической системы. Формулы (5) позволяют вычислять работы через определенные интегралы по времени и естественным координатам (каждая точка M_j имеет свою естественную координату s_j).

Если существует вещественнозначная функция V такая, что

$$\sum_j \vec{F}_j d\vec{r}_j + \sum_j \vec{F}'_j d\vec{r}_j = dV, \quad (7)$$

то из формулы (2) получаем: $T - V = h$, где h - произвольная постоянная. Функцию $T - V$ называют интегралом механической энергии, а постоянную h называют постоянной механической энергии. Величину $\Pi = -V$ называют потенциальной энергией механической системы.

Условие (7) выполнено, в частности, если все внешние силы \vec{F}_j и внутренние силы \vec{F}'_j потенциальны, то есть при любом j существуют вещественнозначные функции U_j, U'_j такие, что истинны равенства $\vec{F}_j d\vec{r}_j = dU_j$, $\vec{F}'_j d\vec{r}_j = dU'_j$. В этом случае можно положить $V = U + U'$ при $U = \sum_j U_j$, $U' = \sum_j U'_j$.