32. Оптимальная стабилизация управляемых систем

Смирнов Н.В.

1. Постановка задачи. Рассмотрим линейную нестационарную систему в отклонениях
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{Q}(t)\mathbf{u}, \tag{1}$$
где $\mathbf{x}$ — n-мерный вектор фазового состояния; $\mathbf{u}$ — r-мерный вектор управлений; $\mathbf{P}(t)$ и $\mathbf{Q}(t)$ — матрицы соответствующих размерностей с вещественными, непрерывными и ограниченными при $t \in [0, +\infty)$ коэффициентами.

О п р е д е л е н и е 1 [1]. Управление $\mathbf{v}_k$ будем называть *допустимым*, если 1) оно имеет вид
$$\mathbf{u} = \mathbf{M}(t)\mathbf{x}, \tag{2}$$
где элементы матрицы $\mathbf{M}(t)$ является вещественными, непрерывными и ограниченными функциями, заданными при $t \geq 0$; 2) замкнутая система (1), (2)
$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{P}(t) + \mathbf{Q}(t)\mathbf{M}(t))\mathbf{x} \tag{3}$$
экспоненциально устойчива.

О п р е д е л е н и е 2. Система (3) называется *экспоненциально устойчивой*, если существуют такие положительные числа α_1, α_2, β_1, β_2, что для всех $t_0 \geq 0$, $\mathbf{x}_0 \in \mathrm{E}^n$ и $t \geq t_0$ выполняются неравенства
$$\beta_1\|\mathbf{x}_0\|e^{-\alpha_1(t-t_0)} \leq \|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)\| \leq \beta_2\|\mathbf{x}_0\|e^{-\alpha_2(t-t_0)}.$$

Лемма [1]. Если управление (2) допустимо, то для любой вещественной, непрерывной и ограниченной $(r \times n)$-матрицы $\mathbf{N}(t)$, заданной при $t \geq 0$, управление $\mathbf{u} = (\mathbf{M}(t) + \varepsilon\mathbf{N}(t))\mathbf{x}$ также будет допустимо при достаточно малом вещественном ε.

В основе доказательства леммы лежит второй метод Ляпунова. По сути она утверждает, что при наличии одного стабилизирующего управления существует целое семейство таких управлений, из которого можно выбирать оптимальное в некотором смысле.

Предположим, что задан функционал
$$\mathrm{J} = \int_0^{+\infty} \mathbf{f}_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})dt, \tag{4}$$
где $\mathbf{f}_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ — квадратичная форма относительно компонент векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{u}$ с вещественными, ограниченными и непрерывными коэффициентами, являющимися функциями t, заданными при $t \geq 0$:
$$\mathbf{f}_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{B}(t)\mathbf{u} + \mathbf{u}^T\mathbf{B}^T(t)\mathbf{x} + \mathbf{u}^T\mathbf{C}(t)\mathbf{u}.$$
Кроме того, будем предполагать, квадратичная форма $\mathbf{u}^T\mathbf{C}(t)\mathbf{u}$ положительно определена.

О п р е д е л е н и е 3. Допустимое управление $\mathbf{u}_0 = \mathbf{M}_0(t)\mathbf{x}$ называется *оптимальным по отношению к функционалу* (4) при фиксированном $\mathbf{x}_0$, если при любом выборе допустимого управления $\mathbf{u} = \mathbf{M}(t)\mathbf{x}$ оно доставляет величине $\mathrm{J}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u})$ наименьшее возможное значение.

Задача оптимальной стабилизации состоит в нахождении условий существования оптимального стабилизирующего управления и построении методов его вычисления.

2. Синтез оптимального стабилизирующего управления

Теорема 1 [1]. *Для существования оптимального стабилизирующего управления* $\mathbf{u}_0 = \mathbf{M}_0(t)\mathbf{x}$ *для системы* (1) *при любом выборе начального вектора* $\mathbf{x}_0$ *необходимо и достаточно, чтобы матричное уравнение Риккати*

$$\dot{\Theta} + \Theta\mathbf{Q}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{Q}^T\Theta + \Theta\big(\mathbf{P} - \mathbf{Q}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^T\big) + \big(\mathbf{P}^T - \mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{Q}^T\big)\Theta - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^T = \mathbf{O}, \quad (5)$$

имело вещественное, непрерывное, ограниченное решение, заданное при $t \geq 0$*, в виде такой симметрической* $(n \times n)$*-матрицы* $\Theta(t)$*, чтобы управление*

$$\mathbf{u} = \mathbf{C}^{-1}\big(\mathbf{Q}^T\Theta - \mathbf{B}^T\big)\mathbf{x}$$

было допустимым. При этом матрица $\mathbf{M}_0(t)$ *в оптимальном управлении определяется формулой* $\mathbf{M}_0(t) = \mathbf{C}^{-1}\big(\mathbf{Q}^T\Theta - \mathbf{B}^T\big)$.

Доказательство теоремы 1 приведено в [1], стр. 165 – 169.

Метод последовательных приближений В.И.Зубова

Рассмотрим линейную систему в отклонениях (1). Допустимое управление и функционал качества определим как и в пункте 1. Предположим, что $\mathbf{f}_0(t,\mathbf{x},\mathbf{u}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{u}^T\mathbf{C}(t)\mathbf{u}$ — положительно определенная квадратичная форма по $\mathbf{x}$ и $\mathbf{u}$.

Метод состоит в построении последовательности допустимых управлений, сходящейся к оптимальному стабилизирующему управлению

$$\{\mathbf{u}_k(t,\mathbf{x})\} \to \mathbf{u}_0(t,\mathbf{x}), \quad k = 1, 2 \ldots \quad (6)$$

Укажем способ построения последовательности (6).

1. Первое приближение $\mathbf{u}_1(t,\mathbf{x})$ можно найти как обычно строится стабилизирующее управление.

2. Покажем, как по допустимому управлению $\mathbf{u}_k(t,\mathbf{x}) = \mathbf{M}_k(t)\mathbf{x}$ построить $\mathbf{u}_{k+1}(t,\mathbf{x})$.

1) Подставим $\mathbf{u}_k(t,\mathbf{x})$ в (1), получим

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{P}(t) + \mathbf{Q}(t)\mathbf{M}_k(t))\mathbf{x}. \quad (7)$$

Эта система экспоненциально устойчива.

2) Подставим $\mathbf{u}_k(t,\mathbf{x})$ в $\mathbf{f}_0(t,\mathbf{x},\mathbf{u})$:

$$\mathbf{f}_0(t,\mathbf{x},\mathbf{u}_k) = \mathbf{x}^T(\mathbf{A} + \mathbf{M}_k^T\mathbf{C}\mathbf{M}_k)\mathbf{x}.$$

Эта квадратичная форма по предположению положительно определена, следовательно, можно построить квадратичную форму $v_k(t,\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{V}_k(t)\mathbf{x}$ такую, что

$$\left.\frac{dv_k(t,\mathbf{x})}{dt}\right|_{(7)} = -\mathbf{f}_0(t,\mathbf{x},\mathbf{u}_k).$$

Если расписать это соотношение, то мы получим матричное уравнение Ляпунова для определения матрицы $\mathbf{V}_k(t)$

$$\dot{\mathbf{V}}_k + (\mathbf{P} + \mathbf{Q}\mathbf{M}_k)^T\mathbf{V}_k + \mathbf{V}_k(\mathbf{P} + \mathbf{Q}\mathbf{M}_k) = -(\mathbf{A} + \mathbf{M}_k^T\mathbf{C}\mathbf{M}_k).$$

3) Пусть $\mathbf{V}_k(t)$ есть решение этого уравнения. Тогда мы можем сформировать вспомогательную функцию

$$L_k(\mathbf{u}(\cdot)) = v_k(t,\mathbf{x}) + \int_0^t \mathbf{f}_0(t,\mathbf{x},\mathbf{u})dt.$$

Строим управление, оптимальное в смысле демпфирования функции L_k, т.е. доставляющее минимум производной в силу системы (1)

$$\frac{dL_k(t,\mathbf{x})}{dt}\Big|_{(1)} = \frac{dv_k(t,\mathbf{x})}{dt}\Big|_{(1)} + \mathbf{f}_0(t,\mathbf{x},\mathbf{u}).$$

Здесь точка минимума существует и единственна. Управление $\widehat{\mathbf{u}} = -\mathbf{C}^{-1}\mathbf{Q}^T\mathbf{V}_k\mathbf{x}$ — оптимальное в смысле демпфирования функции L_k.

4) Положим

$$\mathbf{u}_{k+1}(t,\mathbf{x}) = -\mathbf{C}^{-1}\mathbf{Q}^T\mathbf{V}_k\mathbf{x}. \tag{8}$$

Схема:

1. $\mathbf{u}_k \to (1) \Rightarrow (7)$.
2. $\mathbf{u}_k \to \mathbf{f}_0 \Rightarrow \mathbf{f}_0(t,\mathbf{x},\mathbf{u}_k)$.
3. ищем $\mathbf{V}_k(t)$ из уравнения Ляпунова.
4. $\mathbf{u}_{k+1}(t,\mathbf{x}) = -\mathbf{C}^{-1}\mathbf{Q}^T\mathbf{V}_k\mathbf{x}$

Получаем последовательность $\{\mathbf{u}_k(t,\mathbf{x})\}$.

Свойства последовательности приближений

Очевидные свойства последовательности $\{\mathbf{u}_k(t,\mathbf{x})\}$:

1) $\frac{dv_k(t,\mathbf{x})}{dt}\Big|_{(7)} + \mathbf{f}_0(t,\mathbf{x},\mathbf{u}_k) = 0$ по построению $\mathbf{V}_k(t)$;

2) функция L_k убывает наискорейшим образом вдоль решений системы (1), замкнутой управлением, оптимальным в смысле демпфирования, т.е. $\mathbf{u}_{k+1}(t,\mathbf{x})$.

Действительно по свойству 1)

$$\frac{dL_k}{dt}\Big|_{(1),\mathbf{u}=\mathbf{u}_k} = 0.$$

Тогда для управления, оптимального в смысле демпфирования,

$$\frac{dL_k}{dt}\Big|_{(1),\mathbf{u}=\mathbf{u}_{k+1}} \le 0$$

и, следовательно,

$$\frac{dv_k(t,\mathbf{x})}{dt}\Big|_{(1),\mathbf{u}=\mathbf{u}_{k+1}} + \mathbf{f}_0(t,\mathbf{x},\mathbf{u}_{k+1}) \le 0.$$

Лемма 1. *Если управление $\mathbf{u}_k$ — допустимо, то допустимо и управление $\mathbf{u}_{k+1}$.*

Доказательство. Нужно проверить экспоненциальную устойчивость системы (1), замкнутой управлением $\mathbf{u}_{k+1}$, заданным формулой (8).

Рассмотрим $v_k(t,\mathbf{x})$. Это положительно определенная квадратичная форма по построению. Вычислим

$$\frac{dv_k(t,\mathbf{x})}{dt}\Big|_{(1),\mathbf{u}=\mathbf{u}_{k+1}}?$$

По свойству 2) имеем оценку

$$\frac{dv_k(t,\mathbf{x})}{dt}\Big|_{(1),\mathbf{u}=\mathbf{u}_{k+1}} \le -\mathbf{f}_0(t,\mathbf{x},\mathbf{u}_{k+1}).$$

Но $\mathbf{f}_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_{k+1})$ — положительно определенная квадратичная форма, следовательно, по критерию экспоненциальной устойчивости $\mathbf{u}_{k+1}$ — стабилизирующее управление, и оно допустимо, т.к. имеет вид $\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{M}_{k+1}(t)\mathbf{x}$.

Лемма доказана.

Следствие. *Если* $\mathbf{u}_1$ — *допустимо, то и все управления* $\mathbf{u}_k$, $k = 2, 3 \ldots$ — *допустимы.*

Лемма 2. *Для* $\forall \mathbf{x}$, $\forall t \geq 0$ *имеет место* $v_{k+1}(t, \mathbf{x}) \leq v_k(t, \mathbf{x})$.

Доказательство. По свойству 1):

$$\frac{dv_{k+1}(t, \mathbf{x})}{dt}\Big|_{(1), \mathbf{u}=\mathbf{u}_{k+1}} + \mathbf{f}_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_{k+1}) = 0.$$

По свойству 2):

$$\frac{dv_k(t, \mathbf{x})}{dt}\Big|_{(1), \mathbf{u}=\mathbf{u}_{k+1}} + \mathbf{f}_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_{k+1}) \leq 0.$$

Вычтем из первого соотношения второе, получим

$$\frac{d}{dt}(v_{k+1}(t, \mathbf{x}) - v_k(t, \mathbf{x}))\Big|_{(1), \mathbf{u}=\mathbf{u}_{k+1}} \geq 0.$$

Выберем $\mathbf{x}_0$ и найдем $\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ решение системы (1) при $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{k+1}$. Тогда

$$\frac{d}{dt}(v_{k+1}(t, \mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)) - v_k(t, \mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0))) \geq 0.$$

Проинтегрируем от t_0 до T, получим

$$(v_{k+1}(T, \mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)) - v_k(T, \mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0))) - (v_{k+1}(t_0, \mathbf{x}_0) - v_k(t_0, \mathbf{x}_0)) \geq 0.$$

Перейдем к пределу при $T \to \infty$. Первое слагаемое стремится к нулю, так как v_k и v_{k+1} — квадратичные формы по $\mathbf{x}$, а решение $\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ стремится к нулю в силу экспоненциальной устойчивости. Тогда имеет место

$$-v_{k+1}(t_0, \mathbf{x}_0) + v_k(t_0, \mathbf{x}_0) \geq 0.$$

Так как $\mathbf{x}_0, t_0$ любые, то Лемма доказана.

Лемма 3. *Если управление* $\mathbf{u}_1(t, \mathbf{x})$ — *допустимо, то найдутся такие положительные константы* $\mu_1, \mu_2, \beta_1, \beta_2$, *что для любого* $k = 1, 2 \ldots$ *решения системы* (1) *при* $\mathbf{u}_k(t, \mathbf{x})$ *удовлетворяют оценке*

$$\mu_1 \|\mathbf{x}_0\| e^{-\beta_1(t-t_0)} \leq \|\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)\| \leq \mu_2 \|\mathbf{x}_0\| e^{-\beta_2(t-t_0)}, \quad \forall t \geq t_0.$$

Лемма 3 говорит о равномерной по k экспоненциальной устойчивости. (Без доказательства.)

Сходимость последовательности приближений

Перейдем к вопросу сходимости последовательности $\{\mathbf{u}_k(t, \mathbf{x})\}$.

Теорема 2 [1]. *Если функция* $\mathbf{f}_0(t,\mathbf{x},\mathbf{u})$ *положительно определена и управление* $\mathbf{u}_1(t,\mathbf{x})$ *— допустимо, то последовательность* $\{\mathbf{u}_k(t,\mathbf{x})\}$ *сходится к оптимальному стабилизирующему управлению* $\mathbf{u}_0(t,\mathbf{x})$ *(равномерно в каждой ограниченной области изменения величин* $\mathbf{x},t$*).*

Доказательство. Докажем, что последовательность матриц квадратичных форм v_k сходится к некоторому пределу $\{\mathbf{V}_k(t)\}\to\mathbf{V}_0(t)$.

1) По лемме 2 последовательность $\{v_k(t,\mathbf{x})\}_{k=1}^{\infty}$ при любых фиксированных t и $\mathbf{x}$ монотонно убывает, но эта последовательность ограничена снизу нулем, т.к. все формы положительно определены, следовательно, такая последовательность имеет предел, а значит, сходится.

2) Зафиксируем $\overline{\mathbf{x}}=(0,\dots,0,1,0,\dots,0)^T$ (1 стоит на i-ом месте) , тогда $v_k(t,\overline{\mathbf{x}})=v_{ii}^{(k)}(t)$ — диагональный элемент матрицы $\mathbf{V}_k(t)$. Далее, т.к. $\{v_k(t,\overline{\mathbf{x}})\}$ имеет предел, то и диагональный элемент матрицы $\mathbf{V}_k(t)$ имеет предел $v_{ii}^{(k)}(t)\to v_{ii}^{(0)}(t)$.

Пусть $\overline{\mathbf{x}}=(0,\dots,0,1,0,\dots,0,1,0,\dots,0)^T$ (1 стоит на i-ом и j-ом месте). Тогда

$$v_k(t,\overline{\mathbf{x}})=v_{ii}^{(k)}(t)+v_{jj}^{(k)}(t)+2v_{ij}^{(k)}(t).$$

Т.к. $\{v_k(t,\overline{\mathbf{x}})\}$ сходится, то и сумма в правой части сходится. Поскольку сходятся первые два слагаемых, то сходится и третье $v_{ij}^{(k)}(t)\to v_{ij}^{(0)}(t)$. Поскольку сходятся диагональные и недиагональные элементы, то и последовательность матриц сходится $\{\mathbf{V}_k(t)\}\to\mathbf{V}_0(t)$.

3) В этом случае, очевидно, что и последовательность матриц $\{\mathbf{M}_k(t)\}$ сходится, т.к. с учетом (8), $\mathbf{M}_k=-\mathbf{C}^{-1}\mathbf{Q}^T\mathbf{V}_k$.

Пусть $\{\mathbf{M}_k(t)\}\to\mathbf{M}_0(t)$. Если в (8) перейти к пределу при $k\to\infty$, получим

$$\mathbf{M}_0(t)=-\mathbf{C}^{-1}\mathbf{Q}^T\mathbf{V}_0(t).$$

Рассмотрим управление $\mathbf{u}_0(t,\mathbf{x})=\mathbf{M}_0(t)\mathbf{x}$ и покажем, что оно допустимо. По лемме 3 для любого k решение системы (1) с управлением $\mathbf{u}_k(t,\mathbf{x})$ экспоненциально устойчиво, т.е. решение системы (7) также экспоненциально устойчиво.

Перейдем к пределу при $k\to\infty$ в (7), получим

$$\dot{\mathbf{x}}=(\mathbf{P}(t)+\mathbf{Q}(t)\mathbf{M}_0(t))\mathbf{x}.$$

По лемме 3 эта система должна быть также экспоненциально устойчива, следовательно, управление $\mathbf{u}_0(t,\mathbf{x})\mathbf{M}_0(t)\mathbf{x}$ — допустимо.

Для доказательства теоремы осталось показать, что управление $\mathbf{u}_0(t,\mathbf{x})$ — оптимально. В соответствие с теоремой 1 достаточно показать, что $\mathbf{V}_0(t)$ удовлетворяет уравнению Риккати. Поскольку $\mathbf{V}_k(t)$ — решение матричного уравнения Ляпунова, то мы можем перейти в нем к пределу при $k\to\infty$. В результате получим

$$\dot{\mathbf{V}}_0+(\mathbf{P}+\mathbf{Q}\mathbf{M}_0)^T\mathbf{V}_0+\mathbf{V}_0(\mathbf{P}+\mathbf{Q}\mathbf{M}_0)=-(\mathbf{A}+\mathbf{M}_0^T\mathbf{C}\mathbf{M}_0).$$

Заменим $\mathbf{M}_0=-\mathbf{C}^{-1}\mathbf{Q}^T\mathbf{V}_0$. Тогда

$$\dot{\mathbf{V}}_0+\mathbf{P}^T\mathbf{V}_0+\mathbf{V}_0\mathbf{P}+\mathbf{A}-\mathbf{V}_0\mathbf{Q}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{Q}^T\mathbf{V}_0=\mathbf{O},$$

а это и есть уравнение Риккати.

Теорема доказана.

Замечание (важное). Предложенный метод применим и для оптимальной стабилизации нелинейных систем. См. [1], стр. 182 – 197.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зубов В.И. Лекции по теории управления. М., Наука, 1975.