31. Непрерывная и дискретная стабилизация управляемых систем

Смирнов Н.В.

1. Постановка задачи. Система в отклонениях. Задача стабилизации непосредственно вытекает из проблемы устойчивости программных движений управляемых систем [1]. Пусть задана система дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{G}(t, \mathbf{y}, \mathbf{v}), \tag{1}$$

описывающая движение некоторого управляемого объекта. Здесь $\mathbf{y}$ – n-мерный вектор фазового состояния системы, $\mathbf{v}$ – r-мерный вектор управлений, $\mathbf{G}$ – n-мерная вектор-функция, удовлетворяющая условиям теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши.

Пусть для системы (1) решена задача построения программного управления [1]. Это означает, что для заданных начальных данных $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$ найдено управление $\mathbf{v} = \mathbf{v}_p(t)$, называемое *программным*, такое, что *замкнутая* система

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{G}(t, \mathbf{y}, \mathbf{v}_p(t))$$

имеет *программное движение* $\mathbf{y}_p(t) = \mathbf{y}(t, \mathbf{y}_0, t_0, \mathbf{v}_p(t))$. Это движение может быть построено из различных соображений, в частности, программное управление $\mathbf{v}_p(t)$ и соответствующее ему программное движение $\mathbf{y}_p(t)$ могут быть оптимальными в том или ином смысле. В качестве частного примера, имеющего большое прикладное значение, можно привести задачу о программном переводе системы (1) из одного заданного состояния $\mathbf{y}_0$ в другое $\mathbf{y}_1$ за время T (см. вопрос 30).

Далее возникает вопрос об асимптотической устойчивости по Ляпунову программного движения $\mathbf{y}_p(t)$. Для исследования этого вопроса используется известный подход теории устойчивости. А именно, для невозмущенного движения, которым в нашем случае является программное движение $\mathbf{y}_p(t)$, и для программного управления $\mathbf{v}_p(t)$ строится *система в отклонениях.*

В системе (1.1) сделаем замену искомых функций и управлений по формулам

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_p(t) \\ \mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_p(t), \end{cases} \tag{2}$$

где $\mathbf{x}$ – n-мерный *вектор отклонений от программного движения*, а $\mathbf{u}$ – r-мерный *вектор отклонений от программного управления.* Тогда система (1) примет вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \tag{3}$$

где $\mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{G}(t, \mathbf{y}_p(t) + \mathbf{x}, \mathbf{v}_p(t) + \mathbf{u}) - \mathbf{G}(t, \mathbf{y}_p(t), \mathbf{v}_p(t))$.

Система (3) называется *системой в отклонениях.*

Замечание 1. По построению $\mathbf{F}(t, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$, т.е. система (3) всегда имеет нулевое решение при нулевом управлении $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, соответствующее программному движению $\mathbf{y}_p(t)$ и программному управлению $\mathbf{v}_p(t)$ исходной системы (1).

Далее возникает существенное отличие от подходов теории устойчивости, основной задачей которой является вопрос анализа: при каких условиях на правые части системы в отклонениях нулевое решение устойчиво или асимптотически устойчиво? Нас же в дальнейшем будут интересовать следующие проблемы, являющиеся вопросами и анализа, и синтеза [1]:

1. Существуют ли управления $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_r)^T$, при которых нулевое решение системы (1.3) асимптотически устойчиво по Ляпунову ?

2. Если такие управления существуют, то как их построить ?

3. Пусть такие управления можно построить не единственным образом. Как из их множества выбрать оптимальное в том или ином смысле ?

Все эти вопросы представляют собой *общую постановку задачи стабилизации программных движений*, причем последний является самостоятельным разделом теории управления, так называемой задачей оптимальной стабилизации (см. вопрос 32).

В заключении этого пункта отметим, что управление $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_r)^T$, обеспечивающее асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (3) (или программного движения $\mathbf{y}_p(t)$ системы (1)) принято называть *стабилизирующим управлением.* Оно представляет собой некоторую добавку к программному управлению $\mathbf{v}_p(t)$, суть которой определяет следующее важное

Замечание 2. Представим себе, что найдены условия существования и построено стабилизирующее управление $\mathbf{u} = \mathbf{u}_s$. В этом случае из (2) получим управление $\mathbf{v} = \mathbf{v}_p(t) + \mathbf{u}_s$, обладающее следующим свойством. Если его подставить в систему (1), то она будет иметь программное движение $\mathbf{y}_p(t)$ асимптотически устойчивое по Ляпунову.

Упражнение. Показать, что для любого программного управления $\mathbf{v}_p(t)$ и соответствующего программного движения $\mathbf{y}_p(t)$ линейной управляемой системы

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{P}(t)\mathbf{y} + \mathbf{Q}(t)\mathbf{v} + \mathbf{f}(t),$$

системой в отклонениях является одна и та же линейная однородная система вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{Q}(t)\mathbf{u}, \tag{4}$$

В результате можно сделать вывод о том, что алгоритм построения стабилизирующего управления универсален для любого программного движения линейной системы.

2. Непрерывная стабилизация линейных стационарных систем. Рассмотрим линейную стационарную систему в отклонениях

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{Q}\mathbf{u}, \tag{5}$$

где $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ – постоянные $(n \times n)$- и $(n \times r)$-матрицы соответственно.

Определение 1. Управление вида

$$\mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{x}, \tag{6}$$

где $\mathbf{C}$ – постоянная матрица, будем называть *допустимым управлением вида линейной обратной связи.*

Задача стабилизации системы (5) состоит в том, чтобы построить допустимое управление (6), при котором *замкнутая система*

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{P} + \mathbf{Q}\mathbf{C})\mathbf{x} \tag{7}$$

асимптотически устойчива или, что то же самое, собственные числа матрицы $\mathbf{P} + \mathbf{QC}$ должны иметь отрицательные вещественные части (в соответствие с критерием асимптотической устойчивости линейных стационарных систем, см. вопросы 28, 29).

Определение 2. Собственное число матрицы системы (7) называется *неуправляемым*, если при любом выборе матрицы $\mathbf{C}$ оно принадлежит спектру матрицы $\mathbf{P}+\mathbf{QC}$. В противном случае оно называется *управляемым.*

Лемма 1. *Система (7) имеет $n-m$ неуправляемых собственных чисел, где n – размерность системы, а $m = \operatorname{rang}\big(\mathbf{Q}, \mathbf{PQ}, \ldots, \mathbf{P}^{n-1}\mathbf{Q}\big)$.*

Основу доказательства леммы 1 составляет замена переменных

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y}, \quad \mathbf{T} = (\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_m, \widetilde{\mathbf{s}}_{m+1}, \ldots, \widetilde{\mathbf{s}}_n)\,. \tag{8}$$

Здесь $\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_m$ – базис линейной оболочки столбцов матрицы $\big(\mathbf{Q}, \mathbf{PQ}, \ldots, \mathbf{P}^{n-1}\mathbf{Q}\big)$, а $\widetilde{\mathbf{s}}_{m+1}, \ldots, \widetilde{\mathbf{s}}_n$ – его дополнение до базиса пространства R^n. После замены (8) система (5) принимает вид:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{y}}_1 \\ \dot{\mathbf{y}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{O} & \mathbf{P}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{O} \end{pmatrix} \mathbf{u},$$

где $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)^T$ – разбиение вектора $\mathbf{y}$ на две части $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$ размерности m и $n-m$. Блоки матрицы системы имеют соответствующие размерности. Система $\dot{\mathbf{y}}_1 = \mathbf{P}_{11}\mathbf{y}_1 + \mathbf{Q}_1\mathbf{u}$ называется *управляемой подсистемой*, а $\dot{\mathbf{y}}_2 = \mathbf{P}_{22}\mathbf{y}_2$ – *неуправляемой подсистемой.* При этом собственные числа матрицы системы (7) совпадают с собственными числами диагональных блоков матрицы новой системы: $\mathbf{P}_{11} + \mathbf{Q}_1\mathbf{C}_1$, где $\mathbf{C}_1 = \mathbf{CT}$, и $\mathbf{P}_{22}$.

Следствие. Для существования стабилизирующего управления необходимо, чтобы все собственные числа матрицы $\mathbf{P}_{22}$ имели отрицательные вещественные части.

Доказательство очевидно, т.к. все собственные числа матрицы $\mathbf{P}_{22}$ неуправляемые.

Далее займемся непосредственным построением стабилизирующего управления для управляемой подсистемы.

Рассмотрим вспомогательную систему (частный случай управляемой подсистемы):

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{P}_0\mathbf{y} + \mathbf{q}_0\mathbf{u}, \tag{9}$$

где

$$\mathbf{P}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_k \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_{k-1} \\ & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\alpha_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица $\mathbf{P}_0$ называется матрицей Фробениуса или сопровождающей матрицей для полинома $f_0(\lambda) = \det(\mathbf{P}_0 - \lambda\mathbf{E}) = \lambda^k + \alpha_1\lambda^{k-1} + \ldots + \alpha_k$.

Лемма 2. *Для любого набора комплексных чисел $\mu_1, \ldots, \mu_k$ найдется строка $\mathbf{c}_0$ такая, что собственные числа матрицы $\mathbf{P}_0 + \mathbf{q}_0\mathbf{c}_0$ будут совпадать с $\mu_1, \ldots, \mu_k$.*

Приведем схему доказательства. Построим замену переменных $\mathbf{y} = \mathbf{K}_0\mathbf{z}$, которая транспонирует матрицу системы (9). Это возможно при

$$\mathbf{K}_0 = \begin{pmatrix} \alpha_{k-1} & \alpha_{k-2} & \cdots & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_{k-2} & \cdots & \alpha_1 & 1 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \alpha_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

После замены $\mathbf{y} = \mathbf{K}_0\mathbf{z}$ система (9) примет вид

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{P}_0^T\mathbf{z} + \overline{\mathbf{q}}_0\mathbf{u}. \tag{10}$$

Упражнение. Проверить, что $\mathbf{P}_0^T = \mathbf{K}_0^{-1}\mathbf{P}_0\mathbf{K}_0$ и $\overline{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{K}_0^{-1}\mathbf{q}_0 = (0, \ldots, 0, 1)^T$.

Для системы (10) построим управление вида $\mathbf{u} = \gamma\mathbf{z}$, обеспечивающее ей собственные числа $\mu_1, \ldots, \mu_k$. Матрица $\mathbf{P}_0^T + \overline{\mathbf{q}}_0\gamma$ замкнутой системы будет сопровождающей матрицей (матрицей Фробениуса) для полинома $f(\lambda) = \lambda^k + (\alpha_1 - \gamma_k)\lambda^{k-1} + \ldots + (\alpha_k - \gamma_1) = \det(\mathbf{P}_0^T + \overline{\mathbf{q}}_0\gamma - \lambda\mathbf{E})$, где $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ – элементы строки γ.

Построим *эталонный многочлен* $f_э(\lambda)$, корнями которого являются заданные (*эталонные*) комплексные числа $\mu_1, \ldots, \mu_k$:

$$f_э(\lambda) = (\lambda - \mu_1) \times \ldots \times (\lambda - \mu_k) = \lambda^k + \beta_1\lambda^{k-1} + \ldots + \beta_k.$$

Для вычисления элементов строки γ осталось приравнять коэффициенты полиномов $f(\lambda)$ и $f_э(\lambda)$: $\gamma_1 = \alpha_k - \beta_k, \ldots, \gamma_k = \alpha_1 - \beta_1$.

В результате получаем искомое управление $\mathbf{u} = \gamma\mathbf{z} = \gamma\mathbf{K}_0^{-1}\mathbf{y}$. Откуда $\mathbf{c}_0 = \gamma\mathbf{K}_0^{-1}$.

Лемма 2 доказана.

Замечание 3. Общая формулировка леммы 2 позволяет решать частную задачу стабилизации. Для этого достаточно зафиксировать эталонные собственные числа с отрицательными вещественными частями, в соответствие с критерием асимптотической устойчивости. Кроме того, поскольку это можно сделать бесконечным числом способов, то стабилизирующее управление строится неоднозначно, с точностью до набора эталонных собственных чисел.

Замечание 4. Если вспомнить структуру фундаментальной матрицы, то станет ясно, какую роль играют эталонные собственные числа. Величины их вещественных частей – это коэффициенты показателей экспонент, определяющих скорость убывания решений в асимптотически устойчивой системе. Другими словами, они определяют скорость убывания начального отклонения или скорость переходного процесса в системе стабилизации.

Лемма 3. *В управляемой подсистеме* $\dot{\mathbf{y}}_1 = \mathbf{P}_{11}\mathbf{y}_1 + \mathbf{Q}_1\mathbf{u}$ *выбором управления вида* $\mathbf{u} = \mathbf{C}_1\mathbf{y}_1$ *можно обеспечить любой наперед заданный набор собственных чисел.*

Доказательство. Поскольку рассматривается управляемая подсистема, то по критерию Калмана $\operatorname{rang}\big(\mathbf{Q}_1, \mathbf{P}_{11}\mathbf{Q}_1, \ldots, \mathbf{P}_{11}^{m-1}\mathbf{Q}_1\big) = m$. Как и в доказательстве леммы 1, рассмотрим замену переменных $\mathbf{y}_1 = \mathbf{T}_1\mathbf{z}_1$, но матрицу $\mathbf{T}_1$ сформируем иначе:

$$\mathbf{T}_1 = \big(\mathbf{q}_1, \mathbf{P}_{11}\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{P}_{11}^{k_1-1}\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_l, \mathbf{P}_{11}\mathbf{q}_l, \ldots, \mathbf{P}_{11}^{k_l-1}\mathbf{q}_l\big).$$

Здесь $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_l$, $1 \le l \le m$ – столбцы матрицы $\mathbf{Q}_1$. Первая цепочка из k_1 векторов формируется до тех пор, пока остается линейно независимой. Если $k_1 < m$, то к ней добавляется вторая цепочка из k_2 векторов по тому же принципу общей линейной независимости. Процесс формирования матрицы $\mathbf{T}_1$ заканчивается, когда при некотором l выполнится условие $k_1 + \ldots + k_l = m$. Таким образом, процесс формирования матрицы замены переменных отличается от прежнего (в доказательстве леммы 1) специальной упорядоченностью выбираемых базисных векторов из линейной оболочки векторов матрицы Калмана.

Нетрудно убедиться в том, что после замены переменных с матрицей $\mathbf{T}_1$, матрица новой системы $\mathbf{T}_1^{-1}\mathbf{P}_{11}\mathbf{T}_1$ будет блочно-треугольной, а по диагонали будут стоять матрицы Фробениуса вида $\mathbf{P}_0$ (см. (9)). Размерности блоков будут соответственно $k_1 \times k_1, \ldots, k_l \times k_l$. В результате к каждой такой матрице и соответствующей подсистеме можно применить лемму 2. Эта идея завершает схему доказательства леммы 3.

Объединить леммы 1 – 3 можно в виде следующей общей теоремы.

Теорема 1. *Для того чтобы существовало стабилизирующее управление (6) для системы (5), необходимо и достаточно, чтобы вещественные части неуправляемых собственных чисел были отрицательны. Или, что то же самое, неуправляемая часть системы (5) была асимптотически устойчива по Ляпунову.*

Доказательство. Необходимость. Если существует хотя бы одно неуправляемое собственное число с неотрицательной вещественной частью, то какое бы управление вида (6) ни выбрать, система будет иметь это собственное число в составе своего спектра. Следовательно, она не будет асимптотически устойчивой по Ляпунову при любом управлении.

Достаточность вытекает из конструктивных доказательств лемм 1 – 3.

Следствие. Если система (5) полностью управляема, то она стабилизируема управлением вида (6).

Общий алгоритм построения стабилизирующего управления. Основу алгоритма составляют два этапа построения матриц двух замен переменных.

1. Для системы (5) построим матрицу $\mathbf{T}$ как в доказательстве леммы 1, но при этом базис линейной оболочки столбцов матрицы Калмана сформируем как в доказательстве леммы 3. Эта процедура одновременно позволит ответить на вопрос о полной управляемости системы (5). Возможны два случая.

1.1. В случае полной управляемости

$$\mathbf{T} = \big(\mathbf{q}_1, \mathbf{P}\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{P}^{k_1-1}\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_l, \mathbf{P}\mathbf{q}_l, \ldots, \mathbf{P}^{k_l-1}\mathbf{q}_l\big),$$

где $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_l$, $1 \le l \le r$ – столбцы матрицы $\mathbf{Q}$, $k_1 + \ldots + k_l = n$.

1.2. В случае неполной управляемости

$$\mathbf{T} = \big(\mathbf{q}_1, \mathbf{P}\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{P}^{k_1-1}\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_l, \mathbf{P}\mathbf{q}_l, \ldots, \mathbf{P}^{k_l-1}\mathbf{q}_l, \widetilde{\mathbf{s}}_{m+1}, \ldots, \widetilde{\mathbf{s}}_n\big),$$

где $k_1 + \ldots + k_l = m = \operatorname{rang}\big(\mathbf{Q}, \mathbf{PQ}, \ldots, \mathbf{P}^{n-1}\mathbf{Q}\big)$.

2. В обоих случаях построим матрицу системы после первой замены переменных (8): $\overline{\mathbf{P}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{PT}$. Это можно сделать через непосредственное вычисление $\mathbf{T}^{-1}$ или решая n алгебраических систем $\mathbf{T}\overline{\mathbf{P}} = \mathbf{PT}$ относительно столбцов матрицы $\overline{\mathbf{P}}$ методом Гаусса.

2.1. В случае полной управляемости матрица $\overline{\mathbf{P}}$ будет блочно-треугольной, а по диагонали будут стоять матрицы Фробениуса $\mathbf{P}_{01}, \ldots, \mathbf{P}_{0l}$ вида, аналогичного $\mathbf{P}_0$ (см. (9)). Их размерности $k_1 \times k_1, \ldots, k_l \times k_l$ соответственно.

2.2. В случае неполной управляемости матрица $\overline{\mathbf{P}}$ также блочно-треугольная, но последний диагональный блок будет соответствовать неуправляемой подсистеме: $\mathbf{P}_{01}, \ldots, \mathbf{P}_{0l}, \mathbf{P}_{22}$. При этом $\mathbf{P}_{22}$ – $(n - m \times n - m)$-матрица, как и в доказательстве леммы 1.

3. Если реализовался случай 2.1, то по следствию к теореме 1 стабилизирующее управление существует, решение задачи продолжается.

Если реализовался случай 2.2, то по теореме 1 необходимо проверить неуправляемую подсистему с матрицей $\mathbf{P}_{22}$ на асимптотическую устойчивость. Это можно сделать, например, по критерию Рауса – Гурвица (см. вопрос 29). Если все ее собственные числа будут иметь отрицательные вещественные части, то стабилизирующее управление существует, в противном случае, решение задачи прекращается, построить стабилизирующее управление невозможно.

4. Построим аналог матрицы $\mathbf{K}_0$ второй замены переменных (см. лемму 2).

4.1. В случае полной управляемости она будет диагональной $\mathbf{K} = \operatorname{diag}(\mathbf{K}_1, \ldots, \mathbf{K}_l)$.

При этом каждый блок $\mathbf{K}_s$ строится по $\mathbf{P}_{0s}$, $s = \overline{1,l}$, точно также, как матрица $\mathbf{K}_0$ была построена по $\mathbf{P}_0$ в доказательстве леммы 2.

4.2. В случае неполной управляемости $\mathbf{K} = \mathrm{diag}(\mathbf{K}_1, \ldots, \mathbf{K}_l, \mathbf{E}_{n-m})$. Здесь $\mathbf{E}_{n-m}$ – единичная $(n-m \times n-m)$-матрица, соответствующая неуправляемой подсистеме. Этот выбор объясняется тем, что преобразование неуправляемого блока смысла не имеет.

5. Каждому диагональному блоку $\mathbf{P}_{0s}$ поставим в соответствие эталонный многочлен $f^s_Э(\lambda)$ степени k_s, предварительно зафиксировав эталонные собственные числа. По его коэффициентам $\beta_{1s}, \ldots, \beta_{k_s}$ и коэффициентам $\alpha_{1s}, \ldots, \alpha_{k_s}$ характеристического полинома матрицы $\mathbf{P}_{0s}$ построим строку γ_s с элементами $\gamma_{1s} = \alpha_{k_s} - \beta_{k_s}, \ldots, \gamma_{k_s} = \alpha_{1s} - \beta_{1s}$ (см. доказательство леммы 2). Далее из строчек γ_s, $s = \overline{1,l}$ сформируем $(r \times n)$-матрицу

$$5.1 \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \gamma_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \gamma_l \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \qquad 5.2 \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \gamma_2 & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \gamma_l & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Здесь 5.1 – случай полной управляемости, 5.2 – случай неполной управляемости.

Упражнение. Определите длины нулевых строк, обозначенных в матрице Γ символами $\mathbf{0}$.

6. Искомое стабилизирующее управление имеет вид $\mathbf{u} = \Gamma\mathbf{z} = \Gamma\mathbf{K}^{-1}\mathbf{y} = \Gamma\mathbf{K}^{-1}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}$, или окончательно $\mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{x}$, где $\mathbf{C} = \Gamma\mathbf{K}^{-1}\mathbf{T}^{-1}$. При этом матрицу $\mathbf{C}$ можно вычислять непосредственно по указанной формуле, либо решая r линейных алгебраических систем относительно ее строк: $\mathbf{CTK} = \Gamma \Longleftrightarrow (\mathbf{TK})^T\mathbf{C}^T = \Gamma^T$.

Упражнение. Напишите алгоритм решения задачи стабилизации для случая $r = 1$.

Упражнение. Повторите теорему о стабилизации нулевого решения нелинейной системы (3) по линейному приближению (см. теорему 5.1 в [1], стр. 82 – 83).

3. Задача дискретной стабилизации. Рассмотрим линейную стационарную систему в отклонениях (5). Пусть теперь значения отклонения $\mathbf{x}$ доступны для измерения только в заданные моменты времени $0, h, \ldots, kh, \ldots$. Допустимым будем называть управление вида

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(kh), \quad t \in [kh, (k+1)h), \quad k = 0, 1, \ldots \tag{11}$$

Дискретное управление (11) кусочно-постоянно на промежутках длины h.

Требуется построить дискретное управление (11), при котором система (5) асимптотически устойчива. Эту задачу решает следующая

Теорема 2. *Для любого непрерывного управления (6), которое стабилизирует систему (5), существует число $h_0 > 0$ такое, что для всех $h < h_0$ дискретное управление (11) будет также стабилизировать систему (5).*

Доказательство теоремы 2 приведено в [1], смотри стр. 100 – 101. Практическое применение теоремы 2 предполагает построение матрицы $\mathbf{C}$ по указанному выше алгоритму и оценку величины h_0.

Литература

1. Зубов В.И. Лекции по теории управления. М., Наука, 1975.