# 30. Задачи управления и наблюдения в линейных системах. Критерии полной управляемости и наблюдаемости

*Смирнов Н.В.*

**1. Постановка задачи.** [1] Рассмотрим линейную нестационарную систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{Q}(t)\mathbf{u} + \mathbf{f}(t), \tag{1}$$

где $\mathbf{x}$ – $n$-мерный вектор фазового состояния; $\mathbf{u}$ – $r$-мерный вектор управлений; $\mathbf{P}(t)$ и $\mathbf{Q}(t)$ – матрицы соответствующих размерностей с вещественными, непрерывными при $t \in [0, +\infty)$ элементами, $\mathbf{f}(t)$ – некоторая непрерывная при $t \in [0, +\infty)$ вектор-функция.

**Определение 1.** Будем называть управление $\mathbf{u}(t) \in U$ *допустимым*, если оно задано на конечном промежутке $[0, T]$, кусочно-непрерывно на нем и суммируемо с квадратом, т.е.

$$\int_0^T \sum_{i=1}^r u_i^2(t)dt < \infty.$$

**Задача программного управления.** Пусть задан интервал времени $[0, T]$, начальное и конечное состояния $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1$ фазового вектора. Требуется найти допустимое управление, переводящее систему (1) из состояния $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ в состояние $\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_1$.

Допустимое управление, обеспечивающее программный перевод системы (1) из одного заданного состояния в другое (являющееся решением задачи программного управления), называется *программным*, а соответствующее ему решение системы – *программным решением (движением)*.

**2. Интегральное уравнение. Лемма о представлении семейства допустимых управлений.** Для решения поставленной задачи применяется формула общего решения системы дифференциальных уравнений в форме Коши:

$$\mathbf{x}(t, 0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{Y}(t)\left(\mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{Y}^{-1}(\tau)\big(\mathbf{Q}(\tau)\mathbf{u}(\tau) + \mathbf{f}(\tau)\big)d\tau\right),$$

где $\mathbf{Y}(t)$ – фундаментальная матрица однородной системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$, нормированная в точке $t = 0$, т.е. $\mathbf{Y}(0) = \mathbf{E}$ .

Первое граничное условие из постановки задачи выполнено, т.к. $\mathbf{x}(0, 0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$. Для удовлетворения второго необходимо рассмотреть уравнение $\mathbf{x}(T, 0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_1$. Если записать его с учетом формулы Коши, то получим линейное интегральное уравнение относительно вектора программного управления:

$$\int_0^T \mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau = \mathbf{g}, \tag{2}$$

где $\mathbf{B}(t) = \mathbf{Y}^{-1}(t)\mathbf{Q}(t)$, $\mathbf{g} = \mathbf{Y}^{-1}(T)\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 - \int_0^T \mathbf{Y}^{-1}(\tau)\mathbf{f}(\tau)d\tau$.

**Лемма 1.** (О представлении семейства допустимых управлений). *Всякое допустимое управление* $\mathbf{u}(t)$ *можно представить в виде*

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{B}^{\mathbf{T}}(t)\mathbf{c} + \mathbf{v}(t). \tag{3}$$

*Здесь* $\mathbf{B^T(t)}$ *– матрица, транспонированная к* $\mathbf{B}(t)$*,* $\mathbf{c}$ *– постоянный вектор, подлежащий определению,* $\mathbf{v}(t)$ *– некоторая вектор-функция, удовлетворяющая условию ортогональности*

$$\int_0^T \mathbf{B}(\tau)\mathbf{v}(\tau)d\tau = \mathbf{0}. \tag{4}$$

Доказательство леммы 1 можно найти в работе [2].

Лемма 1 дает возможность искать решение задачи программного управления в виде (3). Для этого подставим представление (3) в интегральное уравнение (2). В результате получим систему линейных алгебраических уравнений относительно вектора $\mathbf{c}$:

$$\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{g}, \qquad \mathbf{A} = \int_0^T \mathbf{B}(\tau)\mathbf{B^T}(\tau)d\tau. \tag{5}$$

### 3. Управляемость пары точек и полная управляемость системы

**Определение 2.** Пара точек (состояний системы(1)) $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1$ называется *управляемой*, если существует программное управление, переводящее систему (1) из точки $\mathbf{x}_0$ в точку $\mathbf{x}_1$ на отрезке $[0, T]$.

**Определение 3.** Система (1) называется *полностью управляемой* на отрезке $[0, T]$, если любая пара ее состояний $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_1$ является управляемой на этом отрезке.

**Теорема 1.** *(*Об управляемости пары точек*). Для того чтобы пара состояний* $\mathbf{x}_0$*,* $\mathbf{x}_1$ *системы (1) была управляемой, необходимо и достаточно, чтобы* $\operatorname{rang}\mathbf{A} = \operatorname{rang}(\mathbf{A}, \mathbf{g})$ .

**Теорема 2.** *(*О полной управляемости системы*). Для того чтобы система (1) была полностью управляемой на отрезке* $[0, T]$*, необходимо и достаточно, чтобы матрица* $\mathbf{A}$ *была неособой. При этом все множество программных управлений дается формулой (3), где* $\mathbf{v}(t)$ *– суммируемая с квадратом на* $[0, T]$ *функция, удовлетворяющая условию ортогональности (4),* $\mathbf{c} = \mathbf{A^{-1}g}$.

Теоремы 1,2 являются очевидными следствиями теорем линейной алгебры о совместности системы (5).

### 4. Интегральный критерий линейной независимости векторных функций

**Определение 4.** Вектор-функции $\mathbf{b}^1(t), \dots, \mathbf{b}^m(t)$ называются *линейно независимыми* на отрезке $[0, T]$, если тождественное равенство нулю их линейной комбинации с постоянными коэффициентами

$$\sum_{i=1}^{m} c_i \mathbf{b}^i(t) \equiv \mathbf{0}$$

возможно тогда и только тогда, когда $c_1 = \ldots = c_m = 0$. В противном случае они *линейно зависимы* на $[0, T]$.

Сформулируем интегральный критерий линейной независимости вектор-функций, который понадобится в дальнейшем.

Пусть на отрезке $[0, T]$ заданы $m$ вектор-функций $\mathbf{b}^1(t), \dots, \mathbf{b}^m(t)$ размерности $r$. Рассмотрим $(m \times r)$-матрицу, строками которой являются эти вектор-функции

$$\mathbf{B}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{b}^1(t) \\ \cdots \\ \mathbf{b}^m(t) \end{pmatrix}$$

**Теорема 3.** *Для того чтобы вектор-функции* $\mathbf{b}^1(t), \ldots, \mathbf{b}^m(t)$ *были линейно независимыми на отрезке* $[0, T]$*, необходимо и достаточно, чтобы интегральная матрица*

$$\mathbf{A} = \int_0^T \mathbf{B}(t)\mathbf{B}^T(t)dt$$

*была определенно-положительной.*

Доказательство теоремы 3 можно найти в [1,2].

**Следствие.** *Для того чтобы система (1) была полностью управляемой на отрезке* $[0, T]$*, необходимо и достаточно, чтобы строки матрицы* $\mathbf{B}(t) = \mathbf{Y}^{-1}(t)\mathbf{Q}(t)$ *были линейно независимыми на отрезке* $[0, T]$.

**5. Достаточное условие полной управляемости линейной нестационарной системы.** Перед формулировкой теоремы введем в рассмотрение вспомогательные матрицы

$$\mathbf{S}_0(t) = \mathbf{Q}(t), \quad \mathbf{S}_1(t) = \dot{\mathbf{S}}_0(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{S}_0(t), \quad \ldots, \quad \mathbf{S}_{n-1}(t) = \dot{\mathbf{S}}_{n-2}(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{S}_{n-2}(t).$$

Будем считать, что элементы матриц $\mathbf{P}(t)$, $\mathbf{Q}(t)$ достаточное число раз непрерывно дифференцируемы для того, чтобы элементы всех матриц $\mathbf{S}_0(t), \ldots, \mathbf{S}_{n-1}(t)$ были непрерывны на отрезке $[0, T]$. Сформируем из этих матриц блочную $(n \times rn)$-матрицу:

$$\mathbf{S}(t) = \big(\mathbf{S}_0(t), \ldots, \mathbf{S}_{n-1}(t)\big).$$

**Теорема 4.** *Для того чтобы система (1) была полностью управляемой на отрезке* $[0, T]$*, достаточно, чтобы существовал такой момент* $\tau \in [0, T]$*, что* $\operatorname{rang} \mathbf{S}(\tau) = n$.

Доказательство. Пусть момент $\tau \in [0, T]$ существует. Докажем от противного, что система (1) в этом случае полностью управляема на $[0, T]$.

Предположим, что система (1) не полностью управляема. Тогда по следствию к теореме 3 строки матрицы $\mathbf{B}(t)$ линейно зависимы на $[0, T]$. В этом случае по определению 4 существует вектор $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ такой, что $\mathbf{c}^T\mathbf{B}(t) \equiv \mathbf{0}$ на $[0, T]$. Откуда

$$\mathbf{c}^T\mathbf{Y}^{-1}(t)\mathbf{Q}(t) \equiv \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{c}^T\mathbf{Y}^{-1}(t)\mathbf{S}_0(t) \equiv \mathbf{0}.$$

Последнее тождество продифференцируем $n-1$ раз по $t$ и учтем известное свойство фундаментальной матрицы $\dot{\mathbf{Y}}^{-1}(t) = -\mathbf{Y}^{-1}(t)\mathbf{P}(t)$. В результате получим $n$ тождеств

$$\mathbf{c}^T\mathbf{Y}^{-1}(t)\mathbf{S}_k(t) \equiv \mathbf{0}, \quad k = \overline{0, n-1}.$$

Из них вытекает $\mathbf{c}^T\mathbf{Y}^{-1}(t)\mathbf{S}(t) \equiv \mathbf{0}$.

В последнее тождество подставим момент $t = \tau$, получим $\mathbf{c}^T\mathbf{Y}^{-1}(\tau)\mathbf{S}(\tau) = \mathbf{0}$. Строка $\gamma = \mathbf{c}^T\mathbf{Y}^{-1}(\tau) \neq \mathbf{0}$, т.к. $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$, а $\mathbf{Y}^{-1}(\tau)$ – неособая матрица. Но тогда строки матрицы $\mathbf{S}(\tau)$ линейно зависимы. Следовательно, $\operatorname{rang} \mathbf{S}(\tau) < n$, что противоречит условию теоремы. Противоречие возникло из-за предположения о неполной управляемости системы. Следовательно, оно неверно, а система (1) полностью управляема.

Теорема доказана.

**6. Критерий Калмана полной управляемости линейной стационарной системы.** Рассмотрим частный случай системы (1), когда матрицы $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ постоянные. В этом случае матрица $\mathbf{S}$ также будет постоянной. Ее блоки имеют вид $\mathbf{S}_k = (-1)^k\mathbf{P}^k\mathbf{Q}$, $k = \overline{0, n-1}$. Очевидно, что знак "минус", стоящий перед блоком, не влияет на ранг матрицы, поэтому имеет смысл рассматривать матрицу $\mathbf{S}$ в следующем виде:

$$\mathbf{S} = \big(\mathbf{Q}, \mathbf{PQ}, \ldots, \mathbf{P}^{n-1}\mathbf{Q}\big).$$

**Теорема 5.** (Критерий Калмана). *Для того чтобы система (1) с постоянными матрицами* $\mathbf{P}$ *и* $\mathbf{Q}$ *была полностью управляемой, необходимо и достаточно, чтобы* $\operatorname{rang}\big(\mathbf{Q}, \mathbf{PQ}, \ldots, \mathbf{P}^{n-1}\mathbf{Q}\big) = n$.

Доказательство. Достаточность вытекает из теоремы 4, т.к. линейная стационарная система является частным случаем нестационарной.

Докажем необходимость критерия Калмана. Пусть система полностью управляема, докажем, что $\operatorname{rang}\big(\mathbf{Q}, \mathbf{PQ}, \ldots, \mathbf{P}^{n-1}\mathbf{Q}\big) = n$.

Будем рассуждать от противного. Предположим, что несмотря на полную управляемость системы, имеет место неравенство: $\operatorname{rang}\big(\mathbf{Q}, \mathbf{PQ}, \ldots, \mathbf{P}^{n-1}\mathbf{Q}\big) < n$. В этом случае строки матрицы $\mathbf{S}$ линейно зависимы как постоянные векторы соответствующего пространства. Тогда существует ненулевая строка $\mathbf{c}^T \neq \mathbf{0}$ такая, что $\mathbf{c}^T\mathbf{S} = \mathbf{0}$ и, следовательно:

$$\mathbf{c}^T\mathbf{Q} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{c}^T\mathbf{PQ} = \mathbf{0}, \quad \ldots, \quad \mathbf{c}^T\mathbf{P}^{n-1}\mathbf{Q} = \mathbf{0}.$$

Вспомним представление матрицы

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{Y}^{-1}(t)\mathbf{Q} = e^{-\mathbf{P}t}\mathbf{Q} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-t)^s\mathbf{P}^s\mathbf{Q}}{s!}.$$

Рассмотрим линейную комбинацию строк этой матрицы с коэффициентами – суть элементами строки $\mathbf{c}^T$:

$$\mathbf{c}^T\mathbf{B}(t) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-t)^s\mathbf{c}^T\mathbf{P}^s\mathbf{Q}}{s!}.$$

Как было показано, первые $n$ слагаемых этого ряда являются нулевыми строками. Покажем, что и все остальные члены ряда – нулевые строки.

Рассмотрим слагаемое $\mathbf{c}^T\mathbf{P}^n\mathbf{Q}$ и характеристический многочлен матрицы $\mathbf{P}$: $\det(\mathbf{P} - \lambda\mathbf{E}) = \lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_n$. По теореме Гамильтона – Кэли любая квадратная матрица является корнем своего характеристического многочлена, т.е.

$$\mathbf{P}^n + \alpha_1\mathbf{P}^{n-1} + \ldots + \alpha_n\mathbf{E} = \mathbf{O}.$$

Домножим последнее равенство слева на $\mathbf{c}^T$, а справа на $\mathbf{Q}$ и выразим нужное слагаемое:

$$\mathbf{c}^T\mathbf{P}^n\mathbf{Q} = -\alpha_1\mathbf{c}^T\mathbf{P}^{n-1}\mathbf{Q} - \ldots - \alpha_n\mathbf{c}^T\mathbf{Q} = \mathbf{0}.$$

Далее, рассуждая по индукции, можно показать что, и остальные члены ряда – нулевые строки. Следовательно, $\mathbf{c}^T\mathbf{B}(t) \equiv \mathbf{0}$. В этом случае строки матрицы $\mathbf{B}(t)$ линейно зависимы на отрезке $[0, T]$, а система не является полностью управляемой по следствию из теоремы 3. Противоречие с условием теоремы возникло из-за предположения, что $\operatorname{rang}\big(\mathbf{Q}, \mathbf{PQ}, \ldots, \mathbf{P}^{n-1}\mathbf{Q}\big) < n$. Следовательно, $\operatorname{rang}\big(\mathbf{Q}, \mathbf{PQ}, \ldots, \mathbf{P}^{n-1}\mathbf{Q}\big) = n$.

Теорема доказана.

**Теорема 6.** (Уточненный критерий Калмана). *Для того чтобы система (1) с постоянными матрицами* $\mathbf{P}$ *и* $\mathbf{Q}$ *была полностью управляемой, необходимо и достаточно, чтобы* $\operatorname{rang}\big(\mathbf{Q}, \mathbf{PQ}, \ldots, \mathbf{P}^{n-l}\mathbf{Q}\big) = n$, *где* $l = \operatorname{rang}\mathbf{Q}$.

**Замечание.** Принципиальное отличие теорем 4 – 6 от теорем 1 – 3 состоит в том, что для проверки их условий не требуется вычисление фундаментальной матрицы. Это несомненное преимущество при их практическом применении.

**7. Постановка задачи наблюдения.** Рассмотрим линейную нестационарную систему
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \tag{6}$$
где $\mathbf{x}$ – $n$-мерный вектор фазового состояния; $\mathbf{P}(t)$ – матрица с вещественными, непрерывными при $t \in [0, +\infty)$ элементами, $\mathbf{f}(t)$ – некоторая непрерывная при $t \in [0, +\infty)$ вектор-функция. Кроме того, зададим уравнение измерительного устройства
$$\mathbf{y} = \mathbf{R}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t), \tag{7}$$
где $\mathbf{y}(t)$ – известная $m$-мерная вектор-функция (измерения или показания прибора наблюдения); $\mathbf{R}(t)$ – заданная $(m \times n)$-матрица с вещественными, непрерывными элементами, $\mathbf{g}(t)$ – некоторая непрерывная вектор-функция.

**Задача наблюдения.** Пусть наблюдения ведутся на отрезке $[0, T]$. По известным измерениям $\mathbf{y}(t)$ нужно однозначно определить движение системы $\mathbf{x}(t)$.

**8. Критерий полной наблюдаемости**

**Определение 5.** Система (6), (7) называется *полностью наблюдаемой* на отрезке $[0, T]$, если по значениям вектора наблюдений $\mathbf{y}(t)$ на $[0, T]$ можно однозначно восстановить (определить) движение системы – вектор $\mathbf{x}(t)$.

Для решения поставленной задачи выпишем общее решение системы (6) в форме Коши
$$\mathbf{x}(t, 0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{Y}(t)\left(\mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{Y}^{-1}(\tau)\mathbf{f}(\tau)d\tau\right). \tag{8}$$
Для того чтобы определить движение системы $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t, 0, \mathbf{x}_0)$, необходимо найти вектор начальных данных $\mathbf{x}_0$, поскольку все остальное в представлении (8) известно. Подставляя (8) в (7), получим систему для определения $\mathbf{x}_0$:
$$\mathbf{H}(t)\mathbf{x}_0 = \mathbf{h}(t), \tag{9}$$
где
$$\mathbf{H}(t) = \mathbf{R}(t)\mathbf{Y}(t), \quad \mathbf{h}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{g}(t) - \mathbf{H}(t)\int_0^t \mathbf{Y}^{-1}(\tau)\mathbf{f}(\tau)d\tau.$$

**Теорема 7.** *Для того чтобы система (6), (7) была полностью наблюдаемой на отрезке* $[0, T]$*, необходимо и достаточно, чтобы столбцы матрицы* $\mathbf{H}(t)$ *были линейно независимыми на отрезке* $[0, T]$.

Доказательство. Достаточность. Пусть столбцы матрицы $\mathbf{H}(t)$ линейно независимы на отрезке $[0, T]$. Нужно доказать полную наблюдаемость системы (6), (7). Умножим равенство (9) на $\mathbf{H}^T(t)$ и проинтегрируем по $t$ на отрезке $[0, T]$. Получим алгебраическую систему относительно вектора $\mathbf{x}_0$:
$$\mathbf{D}\mathbf{x}_0 = \mathbf{d}, \quad \mathbf{D} = \int_0^T \mathbf{H}^T(\tau)\mathbf{H}(\tau)d\tau, \quad \mathbf{d} = \int_0^T \mathbf{H}^T(\tau)\mathbf{h}(\tau)d\tau. \tag{10}$$

Матрица $\mathbf{D}$ – положительно определенная по теореме 3, т.к. столбцы матрицы $\mathbf{H}(t)$ (строки матрицы $\mathbf{H}^T(t)$) линейно независимы на $[0, T]$. Тогда $\det \mathbf{D} > 0$ и система (10) имеет единственное решение $\mathbf{x}_0 = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{d}$. В этом случае система (6), (7) полностью наблюдаема. Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть система (6), (7) полностью наблюдаема. Докажем от противного, что столбцы матрицы $\mathbf{H}(t)$ линейно независимы на отрезке $[0, T]$.

Пусть столбцы матрицы $\mathbf{H}(t)$ линейно зависимы. Тогда существует ненулевой вектор $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ такой, что $\mathbf{H}(t)\mathbf{c} \equiv \mathbf{0}$.

Рассмотрим два различных движения системы (6), отвечающие разным начальным данным: $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, $\mathbf{x}_0 = \mathbf{c}$ соответственно, и сравним для них показания измерительного прибора.

В первом случае получим:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{H}(t) \int_0^t \mathbf{Y}^{-1}(\tau)\mathbf{f}(\tau)d\tau + \mathbf{g}(t).$$

Во втором:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{H}(t)\mathbf{c} + \mathbf{H}(t) \int_0^t \mathbf{Y}^{-1}(\tau)\mathbf{f}(\tau)d\tau + \mathbf{g}(t) = \mathbf{H}(t) \int_0^t \mathbf{Y}^{-1}(\tau)\mathbf{f}(\tau)d\tau + \mathbf{g}(t).$$

Из этого следует, что для двух разных начальных данных и соответствующих им движений получаем совершенно одинаковые наблюдения. Значит нельзя однозначно восстановить вектор $\mathbf{x}_0$, что противоречит условию полной наблюдаемости.

Теорема доказана.

**9. Принцип двойственности.** Рассмотрим вспомогательную систему управления

$$\dot{\mathbf{z}} = -\mathbf{P}^T(t)\mathbf{z} + \mathbf{R}^T(t)\mathbf{u}. \tag{11}$$

Здесь $\mathbf{P}(t)$ – матрица системы (6), $\mathbf{R}(t)$ – матрица системы (7).

**Теорема 8.** *(*Принцип двойственности). *Система (6), (7) полностью наблюдаема на* $[0, T]$ *тогда и только тогда, когда система (11) полностью управляема на* $[0, T]$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{Y}(t)$ – фундаментальная матрица системы (6), а $\mathbf{Z}(t)$ – фундаментальная матрица системы (11). По теореме 7 система (6), (7) полностью наблюдаема на $[0, T]$ тогда и только тогда, когда столбцы матрицы $\mathbf{H}(t) = \mathbf{R}(t)\mathbf{Y}(t)$ линейно независимы на $[0, T]$. А по следствию к теореме 3 система (11) полностью управляема на отрезке $[0, T]$ тогда и только тогда, когда строки матрицы $\mathbf{B}(t) = \mathbf{Z}^{-1}(t)\mathbf{R}^T(t)$ линейно независимы на отрезке $[0, T]$.

Покажем, что столбцы $\mathbf{H}(t)$ и строки $\mathbf{B}(t)$ совпадают, т.е. $\mathbf{H}^T(t) = \mathbf{B}(t)$. Поскольку $\mathbf{H}^T(t) = \mathbf{Y}^T(t)\mathbf{R}^T(t)$, то необходимо показать $\mathbf{Y}^T(t) = \mathbf{Z}^{-1}(t)$. Последнее равенство верно, т.к. представляет собой известное свойство двух фундаментальных матриц системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ и сопряженной к ней системы $\dot{\mathbf{z}} = -\mathbf{P}^T(t)\mathbf{z}$ соответственно [2].

Теорема доказана.

**Упражнение.** Принцип двойственности позволяет сформулировать критерии полной наблюдаемости системы (6), (7), аналогичные теоремам 4, 5 о полной управляемости системы (1). Сформулируйте и докажите эти теоремы самостоятельно.

Указание. Для формулировки критериев необходимо применить теоремы 4, 5 к вспомогательной системе (11) и ее стационарному аналогу. Доказательство теорем приведено в [1, 2].

## Литература


1. Зубов В.И. Лекции по теории управления. М., Наука, 1975.

2. Карелин В.В., Харитонов В.Л., Чижова О.Н. Лекции по теории стабилизации программных движений. СПб, ЦОП типографии Изд-ва СПбГУ, 2003.