28. Устойчивость решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Прямой метод Ляпунова.

В.Д.Ногин

1°. Введение. Для того чтобы можно было поставить задачу об устойчивости, необходимо располагать

- объектом, об устойчивости которого будет идти речь,
- определением устойчивости.

Многие реальные динамические объекты могут быть описаны в терминах систем дифференциальных уравнений; в первую очередь – это различного рода механические системы. Именно поэтому в математической теории устойчивости исследуемым объектом является система обыкновенных дифференциальных уравнений. Что касается понятия устойчивости, то основным здесь является *устойчивость по Ляпунову*, в котором реализуется идея «малых» отклонений решения дифференциального уравнения на промежутке времени $[0,+\infty)$ при «небольших» вариациях начальных данных этого решения.

Основная задача теории устойчивости состоит в разработке методов, которые позволяют судить об устойчивости заданного решения, не зная общего решения данной системы дифференциальных уравнений.

Эта теория была создана в конце XIX века великим русским ученым А.М. Ляпуновым. Совокупность всех методов теории устойчивости он разделил на два класса. К первому классу он отнес те методы, которые при своем применении требуют определенную информацию об решениях исследуемой системы. Такой подход принято называть *первым* (*или прямым*) *методом Ляпунова*.

2°. Определение устойчивого решения. Рассмотрим нормальную систему дифференциальных уравнений в векторной форме

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) \qquad t \geq 0, \tag{1}$$

где

t – независимое переменное (время),

$y_1,\ldots,y_n$ – искомые функции переменной t (фазовые переменные),

$f_i : [0,+\infty) \times D \to \mathbf{R}$ – числовые функции $n+1$ переменной,

D – некоторая область фазового пространства $\mathbf{R}^n$,

причем

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(t,\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} f_1(t,\mathbf{y}) \\ \vdots \\ f_n(t,\mathbf{y}) \end{pmatrix}, \quad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dt} \end{pmatrix}.$$

Обычно предполагают, что вектор-функция $\mathbf{f}(t,\mathbf{y})$ по крайней мере непрерывна в области $[0,+\infty) \times D$, которая является областью существования и единственности решения задачи Коши (последнее автоматически выполняется для линейных систем). Решения уравнения (1) называют *движениями* данной системы.

Решению (интегральной кривой) $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t;\, t_0,\, \mathbf{y}_0)$ $(t_0 \geq 0,\, \mathbf{y}_0 \in D)$ системы (1) с начальным условием $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$ соответствует определенная *траектория* в фазовом векторном пространстве $\mathbf{R}^n$; при этом t играет роль параметра. Здесь $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t;t_0,\mathbf{y}_0)$ – решение системы (1) с начальными данными $(t_0,\mathbf{y}_0)$, т.е. $\mathbf{y}(t_0;t_0,\mathbf{y}_0) = \mathbf{y}_0$.

О п р е д е л е н и е 1. Решение $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}(t)$ $(t \geq 0)$ системы (1) называют *устойчивым по Ляпунову при* $t \to +\infty$ (или просто *устойчивым*), если для любого $\varepsilon > 0$ и для любого $t_0 \geq 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon,\, t_0) > 0$ такое, что справедливы следующие два условия

1) все решения $\mathbf{y} = \mathbf{y}\,(t)$ системы (1) (включая $\boldsymbol{\eta}$), удовлетворяющие неравенству

$$\|\mathbf{y}(t_0) - \boldsymbol{\eta}(t_0)\| < \delta,$$

определены на промежутке $[t_0,+\infty)$, т.е. $\mathbf{y}(t) \in D$ для всех $t \geq t_0$;

2) для этих решений выполняется неравенство

$$\|\mathbf{y}(t) - \boldsymbol{\eta}(t)\| < \varepsilon \qquad \forall t \geq t_0,$$

где $\|\mathbf{y}\| = \sqrt{y_1^2 + \ldots + y_n^2}$ – означает евклидову норму вектора $\mathbf{y}$.

З а м е ч а н и е 1. Если система (1) обладает свойством интегральной непрерывности, то решение $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}(t)$ $(t \geq 0)$, устойчивое для *некоторого* фиксированного момента $t_0 \geq 0$, будет устойчивым и для *любого* $t_0 \geq 0$.

3°. Общие теоремы об устойчивости линейных систем.

Линейная система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{y} + \mathbf{f}(t) \qquad t \geq 0, \tag{2}$$

где матрицу $\mathbf{A}(t)=\left(a_{ij}(t)\right)_{n\times n}$ и вектор-функцию $\mathbf{f}(t)=\left(f_1(t),\ldots,f_n(t)\right)^T$ обычно считают непрерывными при $t \ge 0$.

Для системы (1) запишем соответствующую *однородную* систему

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{A}(t)\cdot\mathbf{x} \qquad t \ge 0. \tag{3}$$

О п р е д е л е н и е 2. Линейную систему (1) называют *устойчивой* (*вполне неустойчивой*), если все её решения устойчивы (соответственно – неустойчивы) по Ляпунову.

Поскольку класс линейных систем является наиболее простым и хорошо изученным, вопросы устойчивости решений систем этого класса получили исчерпывающее решение.

Оказалось, что устойчивость *произвольного* решения линейной системы (2) может быть установлена на основе анализа устойчивости лишь одного *нулевого* решения, причем более простой – однородной системы. Этот факт, являющийся прямым следствием линейности системы составляет содержание следующей теоремы.

Теорема 1. *Устойчивость линейной системы* (2) *эквивалентна устойчивости соответствующей однородной системы* (3). *Однородная система* (3) *устойчива тогда и только тогда, когда устойчивым является её нулевое решение.*

Следствие 1. *Линейная система* (2) *устойчива, если устойчиво хотя бы одно решение этой системы, и вполне неустойчива, если неустойчиво некоторое её решение.*

На основании теоремы 1 исследование устойчивости линейных систем всегда можно ограничить лишь классом однородных систем.

Как показывает следующая теорема, устойчивость линейной однородной системы (3) эквивалентна ограниченности всех её решений (что равносильно ограниченности её какой-либо фундаментальной матрицы).

Теорема 2. *Линейная однородная система* (3) *устойчива по Ляпунову тогда и только тогда, когда каждое её решение* $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)$ $(t \ge 0)$ *ограничено на промежутке* $[0,+\infty)$.

Следствие 2. *Если линейная неоднородная система дифференциальных уравнений устойчива, то либо все её решения ограничены, либо все её решения не ограничены при* $t \to +\infty$.

4^0. Критерий устойчивости линейной системы.

Теорема 3. *Линейная однородная система*

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} \qquad t \ge 0 \tag{4}$$

с постоянной матрицей $\mathbf{A} = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ *устойчива тогда и только тогда, когда все собственные значения* λ_j, $j = 1,2,...,n$, *матрицы* $\mathbf{A}$ *обладают неположительными вещественными частями, т.е.*

$$\operatorname{Re}\lambda_j \le 0, \quad j = 1,2,...,n,$$

причём собственные значения λ_j, *имеющие нулевые вещественные части, характеризуются тем свойством, что соответствующие им клетки Жордана сводятся к одному элементу* (*т.е. допускают лишь простые делители, что равносильно выполнению равенства* $n - \operatorname{rang}(\mathbf{A} - \lambda_j\mathbf{E}) = k_j$, *где* k_j – *кратность корня* λ_j).

Следствие 3. *Система* (4) *неустойчива тогда и только тогда, когда хотя бы одно собственное значение матрицы* $\mathbf{A}$ *имеет положительную вещественную часть или хотя бы для одного собственного значения* λ_j *с нулевой вещественной частью выполняется неравенство* $n - \operatorname{rang}(\mathbf{A} - \lambda_j\mathbf{E}) < k_j$.

5⁰. Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

Нелинейные системы дифференциальных уравнений довольно сложны с точки зрения исследования их решений на устойчивость. Однако если правые части исходной нелинейной системы (1) в после применения формулы Тейлора удается представить в специальном виде, то выводы об устойчивости или же неустойчивости данной системы могут быть получены в результате исследования знаков вещественных частей собственных значений определенной матрицы. Этому способствует следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть дана вещественная нелинейная система*

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{x} + \mathbf{q}(t,\mathbf{x}) \qquad t \ge 0, \tag{5}$$

где

$\mathbf{A}$ – *постоянная матрица*;

вектор-функция $\mathbf{q}(t,\mathbf{x})$ *непрерывна по* t *и непрерывно дифференцируема по* $\mathbf{x}$ *в области* $t \ge 0$, $\|\mathbf{x}\| < h$;

$\mathbf{q}(t,\mathbf{0}) = \mathbf{0} \qquad \forall t \ge 0$;

вектор-функция $\mathbf{q}(t,\mathbf{x})$ *удовлетворяет условию*

$$\lim_{\|\mathbf{x}\|\to 0} \frac{\|\mathbf{q}(t,\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} = 0 \tag{6}$$

равномерно по $t \ge 0$.

Тогда если матрица $\mathbf{A}$ ***системы линейного приближения***

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$$

имеет только собственные значения, вещественные части которых отрицательны, то нулевое решение системы (5) *устойчиво. Если же среди собственных значений матрицы* $\mathbf{A}$ *найдется хотя бы одно с положительной вещественной частью, то нулевое решение системы* (5) *неустойчиво.*

З а м е ч а н и е 2. Для выполнения условия (6) достаточно, чтобы функция $\mathbf{q}(t, \mathbf{x})$ удовлетворяла в области $t \ge 0$, $\|\mathbf{x}\| < h$ неравенству

$$\| \mathbf{q}(t, \mathbf{x}) \| \le c \cdot \| \mathbf{x} \|^{1+\alpha}, \tag{7}$$

где α и c − некоторые положительные константы.

З а м е ч а н и е 3. Рассмотрим нелинейную систему (1), в которой векторная функция $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ определена, непрерывна и дважды непрерывно дифференцируема по компонентам вектора $\mathbf{x}$ в области $t \ge 0$, $\|\mathbf{x}\| < h$; $\mathbf{f}(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ для всех $t \ge 0$; причем производные

$$\frac{\partial^2 \mathbf{f}(t, \mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

ограничены в указанной области, а матрица частных производных первого порядка $\mathbf{A} = \partial \mathbf{f}(t, 0) / \partial \mathbf{x}$ постоянна. Тогда система (1) представима в виде (5), где нелинейные члены удовлетворяют неравенству (7) с константой $\alpha = 1$. Отсюда следует, что для исследования устойчивости нулевого решения данной системы (1) применима теорема 4.