Греков М. А.

23 Уравнения Лапласа и Пуассона. Формула Грина. Задачи Дирихле и Неймана, их сведение к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода

1. Уравнение вида

$$\Delta u = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0 \tag{1}$$

называется *уравнением Лапласа*. Соответствующее неоднородное уравнение

$$\Delta u = -f(x), \quad x = (x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_m) \tag{2}$$

носит название *уравнения Пуассона*.

Здесь $f(x)$ — заданная функция точки $x \in \Omega$ евклидова пространства $\mathbb{R}^m$, Δ — оператор Лапласа, $x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_m$ — декартовы координаты. Область Ω имеет кусочно гладкую границу и в общем случае может быть многосвязной.

С уравнением Лапласа тесно связано понятие *гармонической функции*. Функция $u(x)$ называется гармонической в конечной области Ω, если $u \in C^2(\Omega)$ и удовлетворяет уравнению (1); $u(x)$ гармоническая в бесконечной области Ω, если $u \in C^2$ в любой конечной точке $x \in \Omega$, удовлетворяет уравнению (1), и при $x \to \infty$ справедлива оценка

$$|u(x)| \le \frac{C}{|x|^{m-2}}, \quad C = \text{const}. \tag{3}$$

Для $m = 2$ гармоническая в бесконечной области функция ограничена на бесконечности.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что функция двух точек x и ξ

$$E(x,\, \xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{(m-2)r^{m-2}}, & m > 2, \\[2ex] \ln \dfrac{1}{r}, & m = 2, \end{cases} \tag{4}$$

где $r = |x - \xi|$ — расстояние между точками x и ξ, является гармонической в любой конечной, а в случае $m > 2$ и в бесконечной области, не содержащей точки ξ. Действительно, из (4) находим

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x_k^2} = -r^{-m} + m r^{-m-2}(x_k - \xi_k)^2, \quad k = 1,\, 2,\, \ldots,\, m.$$

Отсюда следует, что функция E удовлетворяет уравнению Лапласа (1). Так как $E(x,\, \xi)$ симметрична относительно x и ξ, то она гармонична и по переменной ξ. Заметим, что эта функция при $m = 3$ является, например, потенциалом электрического заряда, помещенного в точке x или ξ.

Функция $E(x,\,\xi)$ называется *фундаментальным* (также *элементарным*, или *сингулярным*) решением уравнения Лапласа. Рассматривая ее как функцию из класса обобщенных функций, можно показать, что она является решением следующего уравнения Пуассона

$$\Delta u = |S_1|\delta(x-\xi). \tag{5}$$

Здесь δ — дельта-функция Дирака, $|S_1|$ — площадь поверхности m-мерного шара единичного радиуса.

2. Для двух функций $u,\, v \in C^2(\Omega)$, непрерывных и имеющих непрерывные первые производные вплоть до границы $\Gamma = \partial\Omega$ конечной области Ω, вторая формула Грина применительно к оператору Лапласа записывается в виде

$$\int\limits_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v)d\Omega = \int\limits_{\Gamma} \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n} \right) d\Gamma, \tag{6}$$

где n — внешняя нормаль к границе Γ.

Возьмем в качестве v функцию E и применим формулу (6) к области $\Omega\backslash(\Omega \cap B)$, где $B = \{\xi :\ |\xi - x| \le \varepsilon\}$. Тогда в пределе при $\varepsilon \to 0$ приходим к интегральному представлению функции класса C^2, которое также носит название *формулы Грина* для таких функций

$$\omega u(x) = \int\limits_{\Gamma} u(\xi)\frac{\partial E(x,\,\xi)}{\partial \nu}d\Gamma - \int\limits_{\Gamma} E(x,\,\xi)\frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu}d\Gamma + \int\limits_{\Omega} E(x,\,\xi)\Delta u(\xi)d\Omega. \tag{7}$$

Величина ω определяется формулой Гаусса

$$\omega = \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial E(x,\,\xi)}{\partial \nu}d\Gamma = \begin{cases} -|S_1|, & x \in \Omega^+, \\ -|S_1|/2, & x \in \Gamma, \\ \ \ 0, & x \in \Omega^-. \end{cases} \tag{8}$$

В (8) при $x \in \Gamma$ замкнутая поверхность Γ должна быть ляпуновской. В остальных двух случаях поверхность Γ может быть кусочно гладкой.

Определение. Поверхность Γ в пространстве $\mathbb{R}^m$ называется *ляпуновской*, если она удовлетворяет следующим *условиям Ляпунова*:

1. В любой точке поверхности Γ существует определенная нормаль.

2. Если x и ξ — точки поверхности Γ, $r = |x-\xi|$ — расстояние между этими точками, ϑ — угол между нормалями $\mathbf{n}$ и $\boldsymbol{\nu}$ к Γ в этих точках соответственно, то существуют такие положительные постоянные A и α, что

$$\vartheta \le Ar^{\alpha}. \tag{9}$$

3. Существует число d, одно и то же для всех точек поверхности, обладающее свойством: параллели к нормали в любой точке поверхности пересекаются с частью поверхности, находящейся внутри сферы радиуса d с центром в этой точке, только один раз.

Таким образом, если известны функции $\mu(\xi) = \partial u(\xi)/\partial\nu$ и $\sigma(\xi) = u(\xi)$ при $\xi \in \Gamma$ и функция $\rho(\xi) = \Delta u(\xi)$ при $\xi \in \Omega$, то формула Грина (7) выражает значение функции u внутри области Ω через значения трех функций: *потенциала двойного слоя* V с поверхностной плотностью распределения масс (зарядов) $\sigma(\xi)$, *потенциала простого слоя* W с поверхностной плотностью распределения масс (зарядов) $\mu(\xi)$ и *объемного потенциала* U с объемной плотностью распределения масс (зарядов) $\rho(\xi)$

$$V(x) = \frac{1}{|S_1|}\int\limits_{\Gamma} \sigma(\xi)\frac{\partial E(x,\,\xi)}{\partial\nu}d\Gamma, \quad W(x) = \frac{1}{|S_1|}\int\limits_{\Gamma} E(x,\,\xi)\mu(\xi)d\Gamma,$$

$$U(x) = \frac{1}{|S_1|}\int\limits_{\Omega} E(x,\,\xi)\rho(\xi)d\Omega. \tag{10}$$

Если u — гармоническая функция, то $U = 0$ и формула Грина принимает вид

$$u(x) = W(x) - V(x), \quad x \in \Omega, \tag{11}$$

причем $u \in C^{\infty}(\Omega)$, в силу возможности дифференцирования сколь угодно раз под знаками первых двух интегралов в (10).

3. Основными краевыми задачами для уравнения Лапласа (1) являются первая краевая задача, или *задача Дирихле*, в которой ищется гармоническая в Ω функция $u \in C(\Omega \cup \Gamma)$, удовлетворяющая условию

$$u(x)\big|_{\Gamma} = \varphi(x), \tag{12}$$

и вторая краевая задача, или *задача Неймана*, в которой гармоническая в Ω функция $u \in C^1(\Omega \cup \Gamma)$ и

$$\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\Gamma} = \psi(x). \tag{13}$$

Здесь $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — заданные непрерывные функции на границе Γ, а условие (13) предполагает существование нормали в точке x. В действительности, условия непрерывности функций могут быть слегка ослаблены.

Если функция u ищется в конечной области Ω, то соответствующие задачи называются *внутренними*, в противном случае — *внешними*. Напомним, что для внешних задач функция u должна удовлетворять условию (3).

Аналогичные краевые задачи ставятся и для уравнения Пуассона (2). Подстановка

$$u = v + U, \tag{14}$$

где функция U определена в (10) при $\rho = f$, сводит внутренние краевые задачи для уравнения Пуассона к соответствующим внутренним краевым задачам для уравнения Лапласа, если $f \in C^1(\Omega) \cap C(\Omega \cup \Gamma)$. При этом функция v должна удовлетворять соответствующему краевому условию с учетом равенства (14).

Внутренняя задача Неймана не всегда разрешима. Необходимым условием существования решения задачи (2), (13) для конечной области Ω является выполнение равенства, которое вытекает из формулы Грина (6)

$$\int\limits_{\Omega} f(x)d\Omega + \int\limits_{\Gamma} \psi(x)d\Gamma = 0. \tag{15}$$

В случае уравнения Лапласа (1) условие (15) принимает вид

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n}d\Gamma = \int\limits_{\Gamma} \psi(x)d\Gamma = 0,$$

а при нулевых краевых условиях

$$\int\limits_{\Omega} f(x)d\Omega = \int\limits_{\Omega} \Delta u d\Omega = 0.$$

Имеют место две теоремы:

Теорема 1. Решение задачи Дирихле, внутренней или внешней, единственно.

Теорема 2. Решение внешней задачи Неймана, имеющее непрерывные вплоть до границы производные первого порядка, при $m > 2$ единственно, а решение внешней задачи при $m = 2$ и решение внутренней задачи определено с точностью до константы.

4. В формуле Грина (11) гармоническая в области Ω функция u определяется по предельным значениям этой функции и ее нормальной производной на границе Γ. Однако, как следует из теорем единственности, эти значения нельзя задать произвольно, и заранее известна на границе может быть либо сама функция (задача Дирихле), либо ее нормальная производная (задача Неймана).

Одним из эффективных методов решения задач Дирихле и Неймана является сведение этих задач к интегральным уравнениям. При этом используются свойства потенциалов двойного и простого слоя.

Пусть Γ — замкнутая поверхность Ляпунова, ограничивающая две области: внутреннюю (конечную) Ω^+ и внешнюю Ω^-. Справедливы следующие теоремы о *предельных значениях*:

Теорема 3. Если плотность $\sigma(\xi)$ потенциала двойного слоя V непрерывна на Γ, то существуют предельные значения потенциала V^+ и V^- на Γ, которые определяются равенством

$$V^{\pm}(x_0) = \mp\frac{1}{2}\sigma(x_0) + V(x_0), \quad x_0 \in \Gamma. \tag{16}$$

В (16) по определению $V^{\pm}(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} V(x)$ при $x \in \Omega^{\pm}$, $x_0 \in \Gamma$; $V(x_0)$ — *прямое значение потенциала двойного слоя* на поверхности Γ

Теорема 4. Если плотность $\mu(\xi)$ потенциала простого слоя W непрерывна на Γ, то существуют предельные значения нормальной производной потенциала $\partial W^+/\partial n$ и $\partial W^-/\partial n$ на Γ, которые выражаются по формуле

$$\frac{\partial W^{\pm}(x_0)}{\partial n} = \pm\frac{1}{2}\mu(x_0) + \frac{\partial W(x_0)}{\partial n}. \tag{17}$$

Здесь $\partial W^{\pm}(x_0)/\partial n = \lim\limits_{x\to x_0} \partial W(x)/\partial n$ при $x \in \Omega^{\pm}$, $x_0 \in \Gamma$.

Последнее слагаемое в (17) называется *прямым значением нормальной производной потенциала простого слоя.* Это значение можно получить, дифференцируя выражение для W в (10) по внешней нормали n к Γ, проходящей через точку x. При $x = x_0 \in \Gamma$ получим

$$\frac{\partial W(x_0)}{\partial n} = \int\limits_{\Gamma} \mu(\xi)\frac{\partial E(x_0,\, \xi)}{\partial n} d\Gamma. \tag{18}$$

Можно показать, что если плотность $\mu(\xi)$ измерима и ограничена, то интеграл в (18) сходится.

5. Поставим сразу четыре краевые задачи для уравнения Лапласа (1): найти функцию $u(x)$, гармоническую в Ω^+ или Ω^- и удовлетворяющую либо условию задачи Дирихле (12), либо условию задачи Неймана (13). Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ будем считать непрерывными на замкнутой ляпуновской поверхности Γ, ограничивающей рассматриваемые области.

Решение задачи Дирихле будем искать в виде потенциала двойного слоя

$$u(x) = V(x), \quad x \in \Omega^+(\Omega^-), \tag{19}$$

а решение задачи Неймана — в виде потенциала простого слоя

$$u(x) = W(x), \quad x \in \Omega^+(\Omega^-), \tag{20}$$

потребовав, чтобы соответствующие плотности $\sigma(x)$ и $\mu(x)$ были непрерывны на Γ.

Любая из формул (19), (20) дает гармоническую функцию u как в Ω^+, так и в Ω^-. Осталось удовлетворить только краевым условиям. Следует заметить, что решение внешней задачи Дирихле не всегда можно представить в виде (19), так как оно может иметь порядок убывания на бесконечности $O(|x|^{2-m})$, в то время как потенциал V убывает быстрее и имеет порядок $O(|x|^{1-m})$.

Перейдем в (19) и (20) к пределу при $x \to x_0 \in \Gamma$ из Ω^+ и Ω^-. Тогда при учете (12), (13), (16) и (17), заменив обозначение x_0 на x, получим четыре интегральных уравнения относительно неизвестных плотностей σ и μ, непрерывных на Γ

$$\sigma(x) - \frac{2}{|S_1|}\int\limits_{\Gamma} \sigma(\xi)\frac{\partial E(x,\, \xi)}{\partial \nu} d\Gamma = -2\varphi(x), \quad x \in \Gamma, \tag{21}$$

$$\mu(x) + \frac{2}{|S_1|}\int\limits_{\Gamma} \mu(\xi)\frac{\partial E(x,\, \xi)}{\partial n} d\Gamma = 2\psi(x), \quad x \in \Gamma, \tag{22}$$

$$\sigma(x) + \frac{2}{|S_1|}\int\limits_{\Gamma} \sigma(\xi)\frac{\partial E(x,\, \xi)}{\partial \nu} d\Gamma = 2\varphi(x), \quad x \in \Gamma, \tag{23}$$

$$\mu(x) - \frac{2}{|S_1|}\int\limits_{\Gamma} \mu(\xi)\frac{\partial E(x,\, \xi)}{\partial n} d\Gamma = -2\psi(x), \quad x \in \Gamma. \tag{24}$$

Уравнения (21) и (22) отвечают внутренним задачам Дирихле и Неймана соответственно, а (23) и (24) — соответствующим внешним задачам.

Ядра интегральных уравнений (21)–(24) $\partial E/\partial \nu$ и $\partial E/\partial n$ имеют слабую особенность. Действительно

$$\frac{\partial E}{\partial \nu} = \frac{\partial E}{\partial r}\cos(\nu,\, r) = -\frac{\cos(\nu,\, r)}{r^{m-1}}, \quad \frac{\partial E}{\partial n} = -\frac{\cos(n,\, r)}{r^{m-1}}. \tag{25}$$

Для ляпуновской поверхности имеет место оценка

$$|\cos(\nu,\, r)| \leq Cr^{\alpha}, \quad |\cos(\nu,\, r)| \leq Cr^{\alpha}, \quad C = \mathrm{const}, \quad 0 < \alpha \leq 1. \tag{26}$$

Таким образом, уравнения (21)–(24) — интегральные уравнения со слабой (интегрируемой) особенностью (порядок особенности меньше размерности поверхности Γ). Эти уравнения могут быть приведены к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода, и поэтому их также называют *фредгольмовскими*. Так, если в двумерном случае перейти от координат точек x, ξ на Γ к их дуговым координатам, то ядра уравнений оказываются непрерывными функциями новых координат и, следовательно, являются фредгольмовскими. Тем самым теория, развитая для решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода, применима и к уравнениям (21)–(24).

Важным свойством этих уравнений является то, что уравнения (21) и (24), а также (22) и (23) — попарно *сопряженные*. Действительно, так как ядра $\partial E/\partial \nu$ и $\partial E/\partial n$ вещественны и получаются одно из другого перестановкой аргументов, то они сопряженные.

Исследование каждой из этих пар интегральных уравнений для случая *регулярной поверхности* Γ, которая является одновременно и ляпуновской с показателем $\alpha = 1$, приводит к следующему:

1°. Внутренняя задача Дирихле разрешима для любой непрерывной функции $\varphi(x)$, и решение можно представить в виде потенциала двойного слоя (19).

2°. При $m > 2$ внешняя задача Неймана разрешима для любой непрерывной функции $\psi(x)$, и решение можно представить в виде потенциала простого слоя (20).

3°. Необходимым и достаточным условием разрешимости внешней задачи Неймана при $m = 2$, а также внутренней задачи Неймана при любом m является равенство

$$\int\limits_{\Gamma} \psi(x) d\Gamma = 0, \tag{27}$$

которому должна удовлетворять заданная на Γ непрерывная функция $\psi(x)$. Решение можно представить в виде потенциала простого слоя.

4°. Необходимым и достаточным условием разрешимости внешней задачи Дирихле является равенство

$$\int\limits_{\Gamma} \varphi(x)\mu_0(x) d\Gamma = 0, \tag{28}$$

которому должна удовлетворять заданная на Γ непрерывная функция $\varphi(x)$. Здесь $\mu_0(x)$ — нетривиальное решение однородного интегрального уравнения, соответствующего уравнению (22) для внутренней задачи Неймана. В этом случае решение внешней задачи Дирихле может быть представлено в виде потенциала двойного слоя, убывающее на бесконечности как $|x|^{1-m}$.

Если равенство (28) не выполняется, то решение внешней задачи Дирихле нельзя представить в виде потенциала двойного слоя. Однако разрешимость внешней задачи Дирихле все же имеет место для любой непрерывной функции $\varphi(x)$, при этом решение представимо в виде

$$u(x) = \frac{1}{|S_1|} \int\limits_\Gamma \sigma(\xi) \frac{\partial E(x,\, \xi)}{\partial \nu} d\Gamma + \frac{1}{|S_1||x|^{m-2}} \int\limits_\Gamma \sigma(\xi) d\Gamma. \tag{29}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бицадзе А. В.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1982. 336 с.

2. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971.

3. *Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970.

4. *Михлин С. Г.* Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: Физматгиз, 1959. 232 с.

5. *Михлин С. Г.* Курс математической физики. М.: Наука, 1968, СПб., 2002.

6. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях в частных производных. М., 1961.

7. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 2, 5.

8. *Соболев С. Л.* Уравнения математической физики. М.-Л., 1950.

9. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.