Греков М. А.

# 22 Волновое уравнение и уравнение теплопроводности на прямой, полупрямой и на отрезке

## 1. Волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) \tag{1.1}$$

описывает малые поперечные колебания однородной струны или продольные колебания однородного стержня. Здесь $u(x,\, t)$ — перемещение точки $x$ при изменении времени $t$, $f$ — плотность внешних сил, отнесенных к единицы массы. При $f = 0$ колебания называются свободными, в противном случае — вынужденными.

В случае конечного промежутка $0 \le x \le l$ задача формулируется так:

*Найти дважды непрерывно дифференцируемую функцию* $u(x,\, t)$ (классическое решение $u \in C^2$ *в области* $t > 0$, $0 < x < \ l$, *удовлетворяющую уравнению* (1.1), *начальным*

$$u(x,\, 0) = \varphi_1(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = u_t(x,\, 0) = \varphi_2(x) \ \ (0 \le x \le l) \tag{1.2}$$

и *граничным условиям*

$$\left.\gamma_1(t)\frac{\partial u}{\partial x} + \gamma_2(t) u(x,\, t)\right|_{x=0} = \mu_1(t), \quad \left.\widetilde{\gamma}_1(t)\frac{\partial u}{\partial x} + \widetilde{\gamma}_2(t) u(x,\, t)\right|_{x=l} = \mu_2(t). \tag{1.3}$$

Здесь $\varphi_k(x)$, $\mu_k(t)$ $(k = 1,\, 2)$ — заданные функции координаты точки $x$ и времени $t$ соответственно. Значения $\gamma_1 = \widetilde{\gamma}_1 = 0$, $\gamma_2 \ne 0$, $\widetilde{\gamma}_2 \ne 0$ отвечают первой краевой задаче; $\gamma_1 \ne 0$, $\widetilde{\gamma}_1 \ne 0$, $\gamma_2 = \widetilde{\gamma}_2 = 0$ — второй, а $\gamma_k \ne 0$, $\widetilde{\gamma}_k \ne 0$ $(k = 1,\, 2)$ — третьей.

Рассматриваются также два предельных варианта смешанной задачи (1.1)–(1.3).

Во-первых, если нас интересует колебательный процесс в течение относительно малого промежутка времени, когда влияние границ (т. е. граничных условий) несущественно для точек, достаточно удаленных от концов отрезка $[0,\, l]$, то вместо полной задачи можно рассмотреть предельную *задачу с начальными условиями* для неограниченной области

$$u(x,\, 0) = \psi_1(x), \quad u_t(x,\, 0) = \psi_2(x), \quad \infty < x < \infty. \tag{1.4}$$

Эту задачу называют *задачей Коши.*

Во-вторых, при изучении явления вблизи одной из границ, когда влиянием второй границы в течение интересующего нас промежутка времени можно пренебречь, вместо условий (1.2), (1.3) приходим к следующим условиям для уравнения (1.1) на полуограниченной прямой

$$u(x,\, 0) = \varphi_1(x), \quad u_t(x,\, 0) = \varphi_2(x), \quad 0 \le x < \infty \tag{1.5}$$

$$\left.\gamma_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma_2 u(x,\, t)\right|_{x=0} = \mu_1(t), \ \ t \ge 0, \tag{1.6}$$

**1.1.** Решение *задачи Коши* (1.1), (1.4) можно записать в виде

$$u(x,\,t) = g_1(x - at) + g_2(x + at) + u_f(x,\,t), \tag{1.7}$$

где

$$g_1(z) = \frac{1}{2}\psi_1(z) - \frac{1}{2a}\int\limits_{z_0}^{z}\psi_2(\alpha)d\alpha, \quad g_2(z) = \frac{1}{2}\psi_1(z) + \frac{1}{2a}\int\limits_{z_0}^{z}\psi_2(\alpha)d\alpha,$$

$$u_f(x,\,t) = \frac{1}{2a}\int\limits_0^t\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\,\tau)d\xi d\tau. \tag{1.8}$$

Для однородного волнового уравнения ($f = 0$) формулы (1.7), (1.8) называют *решением Даламбера* (*D'Alembert*). Рассматривая процесс свободных колебаний бесконечной струны, можно сказать, что смысл решения Даламбера состоит в распространении начального возмущения вправо (прямая волна $g_1$) и влево (обратная волна $g_2$) со скоростью $a$.

Решение (1.7), (1.8) единственно. Для существования классического решения задачи Коши (1.1), (1.4) необходимо, чтобы $f \in C(t \geq 0)$, $\psi_1 \in C^2(\mathbb{R}^1)$, $\psi_2 \in C^1(\mathbb{R}^1)$. Корректность постановки задачи следует из самого решения. То есть можно показать, что решение $u(x,\,t)$ непрерывно зависит от данных $f$, $\psi_1$, $\psi_2$ в следующем смысле: если данные изменяются так, что

$$|f - \widetilde{f}\,| < \varepsilon, \quad |\psi_1 - \widetilde{\psi}_1| < \varepsilon_1, \quad |\psi_2 - \widetilde{\psi}_2| < \varepsilon_2,$$

то соответствующие решения $u$ и $\widetilde{u}$ в любой полосе $0 \leq t \leq T$ удовлетворяют оценке

$$|u(x,\,t) - \widetilde{u}(x,\,t)| \leq \frac{T^2}{2}\varepsilon + T\varepsilon_2 + \varepsilon_1.$$

Решение Даламбера (1.7), (1.8) можно распространить на случаи, когда область изменения переменной $x$ является полупрямая или отрезок.

**1.2.** В частности, решение однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{1.9}$$

на *полупрямой* $x > 0$ в случае закрепленного конца (первая краевая задача)

$$u(0,\,t) = 0 \tag{1.10}$$

с начальными условиями (1.5) определяется теми же формулами (1.7), (1.8), в которых $\psi_k(y) = \varphi_k(y)$ при $y \geq 0$ и $\psi_k(y) = -\varphi_k(-y)$ при $y \leq 0$ (нечетное продолжение функций $\varphi_k$).

В случае свободного конца струны (вторая краевая задача) граничное условие (1.10) заменяется на условие

$$u_x(0,\,t) = 0 \tag{1.11}$$

и тогда выражения (1.7), (1.8) будет решением смешанной задачи (1.9), (1.5), (1.11), если принять, что $\psi_k(y) = \varphi_k(y)$ при $y \ge 0$ и $\psi_k(y) = \varphi_k(-y)$ при $y \le 0$ (четное продолжение функций $\varphi_k$).

**1.3.** Соотношения (1.7), (1.8) дают решение однородного волнового уравнения (1.9) на *конечном отрезке* $0 \le x \le\ l$ при начальных условиях (1.2) и граничных условиях

$$u(0,\, t) = 0, \quad u(l,\, t) = 0 \;\; (t \ge 0), \tag{1.12}$$

если $\psi_k(y) = \varphi_k(y)$ при $y \ge 0$, $\psi_k(y) = -\varphi_k(-y)$ при $y \le 0$ и $\psi_k(y+2l) = \psi_k(y)$ $\forall y$. При этом, для того чтобы решение $u(x,\, t)$ было дважды непрерывно дифференцируемой функцией обоих аргументов, необходимо, чтобы выполнялись условия согласования

$$\varphi_k(0) = \varphi_k(l) = \varphi_k''(0) = \varphi_k{}''(l), \;\; k = 1,\, 2.$$

Заметим, что при однородных граничных условиях, отличных от (1.12), продолжение функций $\varphi_k$ на всю прямую осуществляется по-иному.

Решение *неоднородной* смешанной задачи (1.1)–(1.3) может быть построено методом разделения переменных. В частности, рассмотрим задачу (1.1)–(1.3) на отрезке $0 \le x \le l$ с краевыми условиями первого типа при $\gamma_1 = \widetilde{\gamma}_1 = 0$, $\gamma_2 = \widetilde{\gamma}_2 = 1$. Ее решение запишем в виде суммы трех функций

$$u(x,\, t) = U(x,\, t) + v(x,\, t) + w(x,\, t), \tag{1.13}$$

где

$$U(x,\, t) = \frac{l-x}{l}\mu_1(t) + \frac{x}{l}\mu_2(t), \tag{1.14}$$

а функции $v$, $w$ являются решениями следующих смешанных задач соответственно

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \tag{1.15}$$

$$v(x,\, 0) = \psi_1(x), \;\; v_t(x,\, 0) = \psi_2(x), \tag{1.16}$$

$$v(0,\, t) = v(l,\, t) = 0 \tag{1.17}$$

при

$$\psi_1(x) = \varphi_1(x) + \frac{x-l}{l}\mu_1(0) - \frac{x}{l}\mu_2(0), \quad \psi_2(x) = \varphi_2(x) + \frac{x-l}{l}\mu_1'(0) - \frac{x}{l}\mu_2'(0) \tag{1.18}$$

и

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = f_1(x,\, t), \tag{1.19}$$

$$w(x,\, 0) = w_t(x,\, 0) = 0, \tag{1.20}$$

$$w(0,\, t) = w(l,\, t) = 0 \tag{1.21}$$

при

$$f_1(x,\, t) = f(x,\, t) + \frac{x-l}{l}\mu_1''(t) - \frac{x}{l}\mu_2''(t). \tag{1.22}$$

Подставив (1.13) в (1.1)–(1.3), нетрудно убедиться, что если функция $v$ удовлетворяет уравнениям (1.15)–(1.17), а $w$ — уравнениям (1.19)–(1.21), то функция $u$ является решением исходной задачи.

Метод разделения переменных (метод Фурье) позволяет записать решения задач (1.15)–(1.17) и (1.19)–(1.21) в виде

$$v(x,\,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(A_n\cos\big(a\sqrt{\lambda_n}t\big)+A_n\sin\big(a\sqrt{\lambda_n}t\big)\Big)\sin\sqrt{\lambda_n}x, \tag{1.23}$$

где

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\psi_1(x)\sin\sqrt{\lambda_n}x\,dx,\quad B_n=\frac{2}{al\sqrt{\lambda_n}}\int_0^l\psi_2(x)\sin\sqrt{\lambda_n}x\,dx,\quad \lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{l^2}, \tag{1.24}$$

и

$$w(x,\,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n(t)\sin\sqrt{\lambda_n}x, \tag{1.25}$$

где

$$\Phi_n(t)=\frac{1}{a\sqrt{\lambda_n}}\int_0^t F_n(\xi)\sin\Big(a\sqrt{\lambda_n}(t-\xi)\Big)d\xi,\quad F_n(\xi)=\frac{2}{l}\int_0^l f_1(\eta,\,\xi)\sin\sqrt{\lambda_n}\eta\,d\eta.$$

Аналогично строится решение смешанной задачи (1.1)–(1.3) с краевыми условиями других типов. При этом частоты собственных колебаний и формы этих колебаний, вообще говоря, будут отличаться от соответствующих величин $\sqrt{\lambda_n}$ и $\sin\sqrt{\lambda_n}x$, отвечающих первой краевой задаче.

### 2. Уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t) \tag{2.1}$$

характеризует распространение тепла в тонком однородном стержне с теплоизолированной боковой поверхностью. Здесь $u(x,\,t)$ — температура в точке $x$ в момент времени $t$, $f(x,\,t)$ — с точностью до постоянного множителя плотность источников тепла.

Для стержня конечной длины $l$ задача определения температуры $u$ формулируется так:

*Найти ограниченную функцию* $u(x,\,t)\in C^2(0,\,l)\cap C^1[0,\,\infty)$ (классическое решение) *в области* $t>0,\ 0<x<\ l$, *удовлетворяющую уравнению* (2.1), *начальному условию*

$$u(x,\,0)=\varphi(x),\quad (0\le x\le l) \tag{2.2}$$

и *граничным условиям*

$$\gamma_1(t)\frac{\partial u}{\partial x}+\gamma_2(t)u(x,\,t)\Big|_{x=0}=\mu_1(t),\quad \widetilde{\gamma}_1(t)\frac{\partial u}{\partial x}+\widetilde{\gamma}_2(t)u(x,\,t)\Big|_{x=l}=\mu_2(t). \tag{2.3}$$

Здесь $\varphi(x)$, $\mu_k(t)$ $(k = 1,\, 2)$ — заданные функции координаты точки $x$ и времени $t$ соответственно. Значения $\gamma_1 = \widetilde{\gamma}_1 = 0$, $\gamma_2 \neq 0$, $\widetilde{\gamma}_2 \neq 0$ отвечают первой краевой задаче; $\gamma_1 \neq 0$, $\widetilde{\gamma}_1 \neq 0$, $\gamma_2 = \widetilde{\gamma}_2 = 0$ — второй, а $\gamma_k \neq 0$, $\widetilde{\gamma}_k \neq 0$ $(k = 1,\, 2)$ — третьей. В частности, при $\gamma_1 = \widetilde{\gamma}_1 = 1$, $\gamma_2 = -\widetilde{\gamma}_2 = -h$, $\mu_1 = \mu_2 = 0$ на концах стержня происходит свободный теплообмен, $h$ — коэффициент теплообмена.

Для существования классического решения задачи (2.1)–(2.3) должны быть выполнены условия гладкости

$$f \in C[0,\, l] \cap C[0,\, \infty), \;\; \varphi \in C[0,\, l], \;\; \mu_k \in C[0,\, \infty)$$

и условия согласования

$$\gamma_1(0)\varphi'(0) + \gamma_2(0)\varphi(0) = \mu_1(0), \quad \widetilde{\gamma}_1(0)\varphi'(0) + \widetilde{\gamma}_2(0)\varphi(0) = \mu_2(0).$$

Как и в случае волнового уравнения, имеет смысл искать решение уравнения (2.1) в *бесконечной области* $\infty < x < \infty$ (*задача Коши*) при начальном условии

$$u(x,\, 0) = \psi(x), \tag{2.4}$$

и в *полупрямой* $x > 0$ при условиях

$$u(x,\, 0) = \varphi(x), \tag{2.5}$$

$$\gamma_1(t)\frac{\partial u}{\partial x} + \gamma_2(t)u(x,\, t)\bigg|_{x=0} = \mu(t) \tag{2.6}$$

**2.1.** Используя метод разделения переменных можно получить решение *задачи Коши* (2.1), (2.4) при $f = 0$ в виде

$$u(x,\, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi)\, e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}} d\xi. \tag{2.7}$$

Функция
$$v(x,\, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}}, \tag{2.8}$$
рассматриваемая как функция от переменных $x$, $t$ удовлетворяет уравнению (2.1) при $f = 0$ и называется *фундаментальным решением* соответствующего однородного уравнения теплопроводности.

Физический смысл фундаментального решения (2.8) заключается в том, что оно дает распределение температуры, которое вызывается мгновенным точечным источником тепла величины $Q = c\rho$ ($c$ — теплоемкость, $\rho$ — плотность материала стержня), помещенным в начальный момент времени $t = 0$ в точке $x = \xi$.

Из (2.7) следует, что функция $u(x,\, t)$ непрерывно дифференцируема по обоим переменным сколь угодно раз независимо от существования производных у функции $\varphi(x)$. В отличие от уравнения теплопроводности, такая гладкость не свойственна решению задачи Коши для однородного волнового уравнения (1.1). Отметим, кроме того, что согласно (2.7) тепло распространяется вдоль стержня не постепенно, а мгновенно. Это легко показать, если считать, что $\varphi(x) \equiv 0$ вне конечного отрезка. Такой эффект связан с неточностью физических гипотез, лежащих в основе построения модели.

**2.2.** Рассмотрим задачу о распространении тепла в *полуограниченном стержне* с теплоизолированной боковой поверхностью при отсутствии источников тепла ($f = 0$) и при заданной температуре на конце $x = 0$, т. е. краевом условии первого типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (x > 0,\, t > 0), \tag{2.9}$$

$$u(x,\, 0) = \varphi(x), \;\; u(0,\, t) = \mu(t). \tag{2.10}$$

Решение задачи (2.9), (2.10) ищется в виде суммы

$$u = u_1 + u_2, \tag{2.11}$$

где $u_1$ и $u_2$ суть решения следующих задач

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = 0, \quad (x > 0,\, t > 0), \tag{2.12}$$

$$u_1(x,\, 0) = \varphi(x), \;\; u_1(0,\, t) = 0. \tag{2.13}$$

и

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = 0, \quad (x > 0,\, t > 0), \tag{2.14}$$

$$u_2(x,\, 0) = 0, \;\; u_2(0,\, t) = \mu(t). \tag{2.15}$$

Для решения задачи (2.12), (2.13) можно воспользоваться соотношением (2.7), приняв $\psi(\xi) = \varphi(\xi)$ при $\xi > 0$ и $\psi(\xi) = -\varphi(-\xi)$ при $\xi < 0$. Тогда

$$u_1(x,\, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_0^\infty \varphi(\xi) \left( e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(\xi + x)^2}{4a^2 t}} \right) d\xi. \tag{2.16}$$

Заметим, что в случае краевого условия второго типа ($\partial u_1 / \partial x = 0$ при $x = 0$) функция $\varphi(x)$ продолжается на отрицательную полуось четным образом.

Решение задачи (2.14), (2.15) имеет вид

$$u_2(x,\, t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{\mu(\tau)}{\sqrt{(t - \tau)^3}}\, e^{-\frac{\xi^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi. \tag{2.17}$$

**2.3.** Для изучения распространения тепла в *стержне конечных размеров*, решение соответствующей смешанной задачи также ищется методом разделения переменных. В частности, для задачи (2.1)–(2.3) и краевых условиях первого типа ($\gamma_1 = \widetilde{\gamma}_1 = 0$, $\gamma_2 = \widetilde{\gamma}_2 = 1$) решение имеет вид

$$u(x,\, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \sqrt{\lambda_n} x, \tag{2.18}$$

где

$$T_n(t) = e^{-a^2\lambda_n t}\left[T_n(0) + \frac{2a^2\sqrt{\lambda_n}}{l}\int\limits_0^t e^{a^2\lambda_n\tau}\left(\mu_1(\tau) - (-1)^n\mu_2(\tau)\right)d\tau\right],$$

$$T_n(0) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\sin\sqrt{\lambda_n}x dx, \quad \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2},$$

При $\mu_1(t) = \mu_2(t) \equiv 0$ решение (2.18) определяет распространения тепла в стержне при нулевой температуре на концах.

Решение *неоднородного уравнения* теплопроводности (2.1) при нулевых краевых и начальных условиях ($\varphi(x) = \mu_1(t) = \mu_2(t) \equiv 0$) находится путем разложения функции $f$ по собственным функциям соответствующей задачи Штурма-Лиувилля для однородного уравнения. Так, в случае первой краевой задачи

$$f(x,\, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\sqrt{\lambda_n}x, \quad f_n(t) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x,\, t)\sin\sqrt{\lambda_n}x dx, \quad \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2} \tag{2.19}$$

и решение исходной задачи имеет вид

$$u(x,\, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int\limits_0^t e^{-\omega_n^2(t-\tau)}f_n(\tau)d\tau\right)\sin\sqrt{\lambda_n}x = \int\limits_0^t\int\limits_0^l G(x,\, \xi,\, t-\tau)f(\xi,\, \tau)d\xi d\tau, \tag{2.20}$$

где

$$G(x,\, \xi,\, t-\tau) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\omega_n^2(t-\tau)}\sin\sqrt{\lambda_n}x\sin\sqrt{\lambda_n}\xi, \quad \omega_n = a\sqrt{\lambda_n}. \tag{2.21}$$

Функция $G(x,\, \xi,\, t)$ называется функцией *мгновенного точечного источника тепла* (или *функцией Грина*). Она дает распределение температуры в стержне $0 \le x \le l$ в момент времени $t$, вызванное действием мгновенного источника тепла величины $Q = c\rho$ в точке $\xi \in (0,\, l)$ при $t = 0$. При этом на концах стержня все время поддерживается нулевая температура.

В заключение отметим, что решение неоднородной смешанной задачи теплопроводности (2.1)–(2.3) находится в виде суммы решений соответствующих вспомогательных задач аналогично тому, как это было показано выше в случае волнового уравнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971.

2. *Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970.

3. *Михлин С. Г.* Курс математической физики. М.: Наука, 1968, СПб., 2002.

4. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях в частных производных. М., 1961.

5. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 2, 5.

6. *Соболев С. Л.* Уравнения математической физики. М.-Л., 1950.

7. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.