А.П.Жабко

16 Линейное уравнение в частных производных первого порядка. Существование и единственность решения начальной задачи.

16.1. Основные определения и вспомогательные сведения

Линейным уравнением в частных производных первого порядка называется уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n} f_s(t,x_1,\ldots,x_n)\cdot\frac{\partial u}{\partial x_s}=0, \qquad (1)$$

в котором функции f_s при $(s=1,2,\ldots,n)$ предполагаются определенными, непрерывными и непрерывно-дифференцируемыми по всем аргументам в R^{n+1}.

Р е ш е н и е м уравнения (1) называется определенная в R^{n+1}, непрерывная и непрерывно-дифференцируемая функция $u(t,x_1,\ldots,x_n)$, обращающая равенство (1) в тождество.

Н а ч а л ь н о й з а д а ч е й (или задачей Коши) называется задача нахождения решения уравнения (1), удовлетворяющего дополнительному условию

$$u(t_0,x_1,\ldots,x_n)=\varphi(x_1,\ldots,x_n), \qquad (2)$$

где число $t_0\in R$ и функция $\varphi\in C^1(R^n)$ заданы и называются начальными условиями.

Рассмотрим вспомогательную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt}=f_s(t,x_1,\ldots,x_n),\ \ s=1,2,\ldots,n, \qquad (3)$$

называемую системой характеристик Коши. В силу наложенных на функции f_s условий существует единственное решение начальной задачи системы (3) с начальными условиями $(t_0,x_{10},\ldots,x_{n0})\in R^{n+1}$. Далее полагаем, что решение указанной задачи задается равенствами

$$x_s=\psi_s(t;t_0,x_{10},\ldots,x_{n0}),\ \ s=1,2,\ldots,n, \qquad (4)$$

или в векторном виде $X=\Psi(t;t_0,X_0)$.

Функции ψ_s $(s=1,\ldots,n)$ являются непрерывно-дифференцируемыми по совокупности аргументов функциями и удовлетворяют условию

$$\psi_s(t_0;t_0,x_{10},\ldots,x_{n0})=x_{s0},\ \ s=1,2,\ldots,n.$$

16.2. Общее решение уравнения (1)

Пусть $u(t,X)$ -- решение уравнения (1), а $X(t)$ -- решение системы (3). Функция $u(t,X(t))$ является непрерывно-дифференцируемой функцией и

$$\frac{du(t,X(t))}{dt}=\left[\ \frac{\partial u(t,X(t))}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial u(t,X)}{\partial x_s}\cdot f_s(t,X)\ \right]_{X=X(t)}.$$

Так как u есть решение уравнения (1), то выражение в квадратных скобках обращается в ноль, поэтому вдоль любого решения системы (3) справедливо тождество

$$\frac{du(t,X(t))}{dt}\Big|_{(3)}\equiv 0. \qquad (5)$$

Теорема 1. Если $\{v_1(t,X),\ldots,v_n(t,X)\}$ -- совокупность независимых непрерывно-дифференцируемых в R^{n+1} первых интегралов системы (3), то равенство

$$u(t,X)=\Phi(v_1(t,X),\ldots,v_n(t,X)), \qquad (6)$$

где $\Phi\in C^1(R^n)$, является общим решением уравнения (1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Известно, что для системы из n обыкновенных дифференциальных уравнений существует совокупность из n непрерывных независимых первых интегралов. При этом любая непрерывная функция, принимающая постоянное значение вдоль решений системы дифференциальных уравнений, является суперпозицией некоторой непрерывной функции от выбранных интегралов.

В случае системы (3) существует совокупность независимых непрерывно-дифференцируемых первых интегралов. Так как решение уравнения (1) есть непрерывно-дифференцируемая функция, удовлетворяющая тождеству (5), то в представлении (6) функция Φ также будет непрерывно дифференцируемой.

С другой стороны, легко проверить, что любая функция, определяемая равенством (6), будет решением уравнения (1), поэтому равенство (6) является общим решением уравнения (1).

Теорема доказана.

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}+x_2\cdot\frac{\partial u}{\partial x_1}+x_1\cdot\frac{\partial u}{\partial x_2}=0.$$

Р е ш е н и е. Система характеристик Коши

$$\frac{dx_1}{dt}=x_{2,}\qquad \frac{dx_2}{dt}=x_1$$

имеет независимые первые интегралы

$$v_1=e^{-t}\cdot(x_1+x_2),\quad v_2=e^{t}\cdot(x_1-x_2).$$

Поэтому общее решение есть

$$u=\Phi(e^{-t}\cdot(x_1+x_2);e^{t}\cdot(x_1-x_2)),$$

где $\Phi(z_1,z_2)$ -- произвольная непрерывно-дифференцируемая функция двух переменных.

16.3. Решение начальной задачи (1),(2)

В этом пункте дополнительно предположим, что все решения системы (3) определены при $t\in(-\infty,+\infty)$. Это означает, что функции $\psi_s\in C^1(R^{n+2})$ при $s=1,\ldots,n.$ Зафиксируем значение t_0, и введем функции

$$v_s(t,X)=\psi_s(t_0;t,X),\quad s=1,\ldots,n. \qquad (7)$$

В соответствии с групповым свойством общего решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений в форме Коши имеем равенства

$$v_s(t,\Psi(t;t_1,X_1))=\psi_s(t_0;t,\Psi(t;t_1,X_1)=\psi_s(t_0;t_1,X_1).$$

Следовательно, вдоль любого решения системы (3) функции v_s принимают постоянное значение. Кроме того,

$$v_s(t_0,X)=x_s, \qquad (8)$$

поэтому система $\{v_1(t,X),\ldots,v_n(t,X)\}$ является совокупностью независимых первых интегралов системы (3).

Теорема 2. Если при $s=1,\ldots,n$ функции $f_s \in C^1(R^{n+1})$ и все решения системы (3) определены при $t \in (-\infty,+\infty)$, то решение $u(t,X)$ уравнения (1) с непрерывно-дифференцируемым начальным условием (2) определено при $(t,X) \in R^{n+1}$ и единственно.

Доказательство. Покажем, что функция $u(t,X)=\varphi(v_1(t,X),\ldots,v_n(t,X))$ будет искомым решением. Так как $v_s(t,X)$ -- первые интегралы системы (3), то по теореме 1 построенная функция является решением уравнения (1). Кроме того, в соответствии с равенствами (8) имеем

$$u(t_0,X)=\varphi(v_1(t_0,X),\ldots,v_n(t_0,X)=\varphi(x_1,\ldots,x_n),$$

поэтому построенное решение удовлетворяет начальному условию (2).

Чтобы показать единственность решения предположим, что существует другое решение задачи (1),(2) -- $\tilde{u}(t,X)$, и при этом в некоторой точке

$$u(t_1,X_1) \neq \tilde{u}(t_1,X_1). \qquad (9)$$

В соответствии с условием (5) имеем тождества

$$\begin{cases} u(t,\Psi(t;t_1,X_1)) \equiv u(t_1,X_1), \\ \tilde{u}(t,\Psi(t;t_1,X_1)) \equiv \tilde{u}(t_1,X_1). \end{cases}$$

Поэтому справедливы равенства

$$\begin{cases} u(t_1,X_1)=u(t,\Psi(t;t_1,X_1))_{t=t_0}=\varphi(\Psi(t_0;t_1,X_1)), \\ \tilde{u}(t_1,X_1)=\tilde{u}(t,\Psi(t;t_1,X_1))_{t=t_0}=\varphi(\Psi(t_0;t_1,X_1)), \end{cases}$$

которые противоречат неравенству (9).

Теорема доказана.

16.4. Пример

Найти решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}+x_2\cdot\frac{\partial u}{\partial x_1}+x_1\cdot\frac{\partial u}{\partial x_2}=0$$

с начальным условием

$$u(t_0,x_1,x_2)=x_1^2+e^{x_2}.$$

Решение. Решение в форме Коши системы для характеристик

$$\frac{dx_1}{dt}=x_2, \quad \frac{dx_2}{dt}=x_1$$

есть

$$\begin{cases} x_1=\frac{1}{2}\cdot(e^{t-t_0}+e^{-t+t_0})\cdot x_{10}+\frac{1}{2}\cdot(e^{t-t_0}-e^{-t+t_0})\cdot x_{20}, \\ x_1=\frac{1}{2}\cdot(e^{t-t_0}-e^{-t+t_0})\cdot x_{10}+\frac{1}{2}\cdot(e^{t-t_0}+e^{-t+t_0})\cdot x_{20}. \end{cases}$$

Поэтому

$$\begin{cases} v_1=x_1\cdot ch(t-t_0)-x_2\cdot sh(t-t_0), \\ v_2=-x_1\cdot sh(t-t_0)+x_2\cdot ch(t-t_0). \end{cases}$$

Следовательно,

$$u(t,x_1,x_2)=[x_1\cdot ch(t-t_0)-x_2\cdot sh(t-t_0)]^2+\exp(-x_1\cdot sh(t-t_0)+x_2\cdot ch(t-t_0).$$