В.В. Жук, А.М. Камачкин

7 Гильбертово пространство. Определение. Простейшие свойства скалярного произведения. Основная теорема. Ряды Фурье в гильбертовом пространстве.

7.1 Определение гильбертова пространства. Свойства скалярного произведения.

Комплексное векторное пространство (линейное пространство) H называется пространством со скалярным произведением, если для каждой пары элементов $x, y \in H$ определено скалярное произведение (x, y) - комплексное число, удовлетворяющее следующим условиям (аксиомам):

1. $(y, x) = \overline{(x, y)}$;
2. $(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda(x_1, y) + \mu(x_2, y)$;
3. $(x, x) \geqslant 0$; $(x, x) = 0$ равносильно $x = \theta$ (θ — нулевой элемент H).

Из определения пространства со скалярным произведением вытекает:

a) $(x, \lambda y_1, +\mu y_2) = \bar{\lambda}(x, y_1) + \bar{\mu}(x_2, y)$ (аксиомы 1 и 2);

b) $(x, \theta) = (\theta, y) = 0$. Действительно, $(x, y \cdot 0) = 0(x, y) = 0$.

c) $|(x, y)|^2 \leqslant (x, x)(y, y)$ (неравенство Коши-Буняковского).

Доказательство. Для доказательства этого предложения рассмотрим выражение

$$(x + \lambda y, x + \lambda y) = (x, x) + \bar{\lambda}(x, y) + \lambda(y, x) + |\lambda|^2(y, y)\,.$$

По аксиоме 3) это выражение неотрицательно, каково бы ни было число λ. Предполагая, что $(y, y) > 0$ (в противном случае $y = \theta$ и доказываемое неравенство очевидно), положим

$$\lambda = -\frac{(x, y)}{(y, y)}\,.$$

На основании сказанного

$$(x, x) - \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} - \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} + \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} \geqslant 0\,,$$

т.е.

$$(x,x)(y,y) - |(x,y)|^2 \geqslant 0\,,$$

что и требовалось доказать.

□

Если в пространстве H со скалярным произведением положить

$$||x|| = \sqrt{(x,x)} \qquad (x \in H)\,, \tag{1}$$

то H становится нормированным пространством. Действительно, из аксиом нормированного простанства только неравенство треугольника не вытекает непосредственно из определения H. Докажем его. Пусть $x, y \in H$. Используя неравенство Коши-Буняковского, имеем

$$||x+y||^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) \leqslant$$
$$\leqslant ||x^2|| + 2||x||||y|| + ||y^2|| = (||x|| + ||y||)^2$$

Нормированное пространство называется унитарным, если в нем можно ввести скалярное произведение, связанное с нормой соотношением (1).

Отметим еще несколько простых предложений, относящихся к пространствам со скалярным произведением.

d) непрерывность скалярного произведения.

   Если $x_n \to x$ и $y_n \to y$, то $(x_n, y_n) \to (x,y)$.

   Доказательство. Действительно, с помощью неравенства Коши-Буняковского получаем

$$|(x,y) - (x_n,y_n)| = |(x, y-y_n) + (x-x_n, y_n)| \leqslant ||x||||y-y_n|| + ||x-x_n||||y_n||\,.$$

   Так как сходящаяся последовательность $\{y_n\}$ ограничена, то правая часть в написанном неравенстве стремится к нулю. Следовательно, $(x_n, y_n) \to (x,y)$.

□

e) Каковы бы ни были элементы $x, y \in H$ справедливо неравенство

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x^2|| + ||y^2||)\,. \tag{2}$$

Доказательство. В самом деле, по определению нормы имеем

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = (x+y, x+y) + (x-y, x-y) =$$
$$= (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) + (x,x) - (x,y) - (y,x) + (y,y) =$$
$$= 2(||x^2|| + ||y^2||)\,.$$

□

Последовательность $\{x_n\}$ нормированного пространства X называется фундаментальной, если $||x_n - x_m||_{n,m\to\infty} \to 0$, (т.е. если для $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что при $n, m \geqslant n_\varepsilon$ будет $||x_n - x_m|| < \varepsilon$). Пространство X называется полным, если в нем всякая фундаментальная последовательность сходится.

Определение 1. *Полное унитарное пространство называется гильбертовым.*

Пусть X — нормированное пространство. Замкнутое векторное пространство $A \subset X$ называется подпространством X. Пусть $E \subset X$. Наименьшее линейное пространство $L(E)$, содержашее E, называется линейной оболочкой множества E. Замыкание $\overline{L(E)}$ линейной оболочки множества E называется линейным замыканием E. Система элементов $\{x_\alpha\}$ называется полной в пространстве X, если $\overline{L(\{x_\alpha\})} = X$.

7.2 Основная теорема гильбертова пространства.

При изучении, гильбертовых пространств весьма важным оказывается понятие ортогональности элементов.

Элементы x и y гильбертова пространства H называются ортогональными, если $(x, y) = 0$. При этом пишут $x \perp y$. Если фиксированный элемент $x \in H$ ортогонален каждому элементу некоторого множества $E \subset H$, то говорят, что x ортогонален E и пишут $x \perp E$.

Наконец, если элементы двух множеств E_1 и E_2 попарно ортогональны, эти множества называются ортогональными ($E_1 \perp E_2$).

Укажем несколько простых фактов, касающихся введенных понятий.

a) Если $x \perp y_1$ и $x \perp y_2$, то $x \perp \lambda y_1 + \mu y_2$.

b) Если $x \perp y_n (n = 1, 2, ...)$ и $y_n \to y$, то $x \perp y$.

   Это следует непосредственно из непрерывности скалярного произведения.

c) Если $x \perp E$, то $x \perp \overline{L(E)}$.

   Для доказательства надо воспользоваться пунктами a) и b).

d) Если $x \perp E$, где E полное в H множество, т.е. если $\overline{L(E)} = H$, то $x = \theta$.

Доказательство. Действительно, тогда $x \perp H$, а следовательно, x ортогонален самому себе, т.е. $(x, x) = 0$, что равносильно $x = \theta$.

□

e) Совокупность всех элементов ортогональных данному множеству E является подпространством H, т.е. замкнутым линейным пространством.

Это пространство называется ортогональным дополнением множества E.

Теорема 1. *(основная теорема гильбертова пространства)*
Пусть H_1 - подпространство H и H_2 - его ортогональное дополнение. Тогда каждый $x \in H$ единственным образом представим в виде

$$x = x' + x'' \qquad (x' \in H_1, x'' \in H_2)\,. \tag{3}$$

При этом x' реализует расстояние от x до H_1, т.е.

$$||x - x'|| = \rho(x, H_1)\,. \tag{4}$$

Доказательство. Положим $d = \rho(x, H_1), d_n = d + \frac{1}{n}$ и для каждого $n \in N$ найдем $x_n \in H_1$ такой, что

$$||x - x_n|| < d_n\,. \tag{5}$$

В силу (2)

$$||2x - (x_n + x_m)||^2 + ||x_m - x_n||^2 = 2(||x - x_n||^2 + ||x_m - x||^2)\,. \tag{6}$$

Так как $\frac{x_n + x_m}{2} \in H_1$, то $||x - \frac{x_n + x_m}{2}|| \geqslant d$ или $||2x - (x_n + x_m)||^2 \geqslant 4d^2$. Тогда из (6) с помощью (5) находим

$$||x_m - x_n||^2 \leqslant 2(d_n^2 + d_m^2) - 4d^2\,.$$

Но $d_n, d_m \to d$ и потому $||x_m - x_n||_{n,m\to\infty} \to 0$, т.е. последовательность $\{x_n\}$ фундаментальная. Вследствие полноты H существует $x' = \lim x_n$, а так как множество H_1 замкнуто (по определению подпространства), то $x' \in H_1$. При этом $||x - x'|| = \lim ||x - x_n||$ и из (5) следует, что $||x - x'|| \leqslant d$. Но так как знак "меньше"невозможен, то

$$||x - x'|| = d\,. \tag{7}$$

Теперь положим $x'' = x - x'$ и покажем, что $x'' \in H_2$, т.е. $x'' \perp H_1$. Возьмем $y \in H_1 \setminus \{\theta\}$. При любом λ имеем $x' + \lambda y \in H_1$, так что

$$||x'' - \lambda y||^2 = ||x - (x' + \lambda y)||^2 \geqslant d^2\,,$$

что можно переписать, используя (7), в форме

$$-\bar{\lambda}(x'', y) - \lambda(y, x'') + |\lambda|^2(y, y) \geqslant 0\,.$$

В частности, при $\lambda = \frac{(x'',y)}{(y,y)}$ получаем отсюда

$$-\frac{|(x'', y)|^2}{(y, y)} - \frac{|(x'', y)|^2}{(y, y)} + \frac{|(x'', y)|^2}{(y, y)} \geqslant 0\,,$$

т.е. $|(x'', y)|^2 \leqslant 0$, что может быть лишь в случае $(x'', y) = 0$. Итак, возможность представления x в форме (3) и соотношение (4) установлены.

Докажем единственность представления (3). В самом деле, если $x = x_1' + x_1''(x_1' \in H_1, x_1'' \in H_2)$, то сопоставив это с (3) получим $x' - x_1' = x_1'' - x''$. Поскольку $x' - x_1' \in H_1, x_1'' - x'' \in H_2$, то $x' - x_1' \perp x_1'' - x''$, откуда получаем $x' - x_1' = x_1'' - x'' = \theta$.

□

Элементы x' и x'', однозначно определяемые элементом x, называются проекциями элемента x на пространство H_1 и H_2 соответственно.

Следствие 1. *Для того, чтобы система элементов $\{x_\alpha\}$, $(\alpha \in \Delta)$ была полной в пространстве H, необходимо и достаточно, чтобы не существовало отличного от θ элемента ортогонального каждому элементу системы.*

Доказательство. Необходимость вытекает из предложения d). Если $H_1 = \overline{L(\{x_\alpha\})} \neq H$, т.е. система элементов $\{x_\alpha\}$ не полна в H, то взяв $x \in H|H_1$ и разложив его на сумму проекций $x = x' + x''$ $(x' \in H_1, x'' \perp H_1)$ будем иметь $x'' \neq \theta$ и $x'' \perp x_\alpha$ $(\alpha \in \Delta)$.

□

7.3 Ряды Фурье.

Система элементов $\{x_\alpha\} \subset H$ называется ортогональной, если $(x_{\alpha'}, x_{\alpha''}) = 0$ при $\alpha' \neq \alpha''$, ортонормированной, если, кроме того, $||x_\alpha|| = 1$ для каждого α. От ортогональной системы, несодержащей θ, нетрудно перейти к ортонормированной, поделив каждый элемент на его норму.

В этом пункте α будет обозначать целое неотрицательное число или $+\infty$.

Пусть в H дана ортонормированная система $\{x_k\}_{k=0}^{\alpha}$. Пусть далее $x \in H$. Числа $a_k(x) = a_k = (x, x_k)$ называются координатами Фурье элемента x по данной ортонормированной системе, а ряд $\sum_{k=0}^{\alpha} a_k x_k$ - рядом Фурье элемента x.

Теорема 2. *Пусть* $\{x_k\}_{k=0}^{\alpha}$ *— ортонормированная система в* H*. Каков бы ни был* $x \in H$*, его ряд Фурье сходится. При этом сумма ряда Фурье*

$$s = \sum_{k=0}^{\alpha} a_k x_k \tag{8}$$

есть проекция элемента x *на подпространство*

$$H_\alpha = \overline{L(\{x_k\}_{k=0}^{\alpha})}$$

и имеет место равенство

$$||x - s||^2 = ||x||^2 - \sum_{k=0}^{\alpha} |a_k|^2 \,. \tag{9}$$

Доказательство. Пусть сначала $\alpha = n \in \mathbb{Z}_+$. Покажем, что $x - s \perp H_\alpha$. Для этого достаточно показать, что $x - s \perp x_k$ при $k = \overline{0, n}$. Имеем

$$(x - s, x_k) = (x, x_k) - \sum_{v=0}^{n} a_v (x_v, x_k) = a_k - \sum_{v=0}^{n} a_v \delta_{v,k} = 0$$

($\delta_{v,k}$ — символ Кронекера). Следовательно, s есть проекция на H_α. Далее

$$||x - s||^2 = (x, x - s) - (s, x - s) = ||x^2|| - (x, s) = ||x^2|| - \sum_{k=0}^{\alpha} |a_k|^2 \,. \tag{10}$$

Тем самым для $\alpha \in \mathbb{Z}_+$ теорема установлена.

Пусть теперь $\alpha = +\infty$. В силу (10) при каждом натуральном n будет

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 \leqslant ||x||^2 \,. \tag{11}$$

Устремляя n к $+\infty$, получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 \leqslant ||x||^2 \,. \tag{12}$$

Таким образом, для любого x ряд $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2$ сходится. Обозначая частные суммы ряда (8) через S_n, будем иметь

$$||S_{n+p} - S_n||^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \,.$$

Отсюда и из полноты H вытекает сходимость ряда Фурье (8). Ясно, что $s \in H_\alpha$ и $x - S_n \perp x_k$ при $k \leqslant n$. Пользуясь свойствами b) и c), получаем отсюда $x - s \perp H_\alpha$, т.е. s - проекция x на H_α. В силу (10)

$$||x - S_n||^2 = ||x||^2 - \sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 \,.$$

Осталось устремить n к ∞ и воспользоваться непрерывностью нормы.

$\square$

Замечание 2 Пусть $\{x_k\}_{k=0}^{\alpha}$ — ортонормированная система в H, $x \in H$. Тогда (см. (11), (12)) справедливо неравенство Ф. Бесселя.

$$\sum_{k=0}^{\alpha} |a_k(x)|^2 \leqslant ||x||^2 \,. \tag{13}$$

Если для некоторого $x \in H$ в (13) реализуется знак равенства, то говорят, что для x выполнено уравнение замкнутости. Система $\{x_k\}_{k=0}^{\alpha}$ называется замкнутой, если уравнение замкнутости выполняется для любого $x \in H$. Из (9) следует, что уравнение замкнутости для x выполняется тогда и только тогда, когда $x = \sum_{k=0}^{\alpha} a_k(x) x_k$.

Следствие 2. *В гильбертовом пространстве H свойство полноты и замкнутости ортонормированной системы $T = \{x_k\}_{k=0}^{\alpha}$ эквивалентны.*

Доказательство. Если система T полна, то $H_\alpha = \overline{L(T)} = H$ и проекция любого элемента $x \in H$ на H_α совпадает с ним самим, и потому, в силу (9), система T замкнута. Обратно, если T замкнута, то опять-таки в силу (9), для всякого $x \in H$ имеем $x = \sum_{k=0}^{\alpha} a_k(x) x_k \in \overline{L(T)}$, т.е. $\overline{L(T)} = H$.

$\square$