В.В. Жук, А.М. Камачкин

1 Степенные ряды. Радиус сходимости и интервал сходимости. Характер сходимости. Интегрирование и дифференцирование.

1.1 Радиус сходимости и интервал сходимости.

Функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_o)^n, \tag{1}$$

где a_n, x и x_0 - вещественные числа, называется степенным рядом. Числа a_n называются коэффициентами степенного ряда (1). Если в ряде (1) сделать замену переменного, положив $\alpha = x - x_0$, то получается ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \alpha^n. \tag{2}$$

Очевидно, что исследование сходимости ряда (1) эквивалентно исследованию сходимости ряда (2), поэтому в дальнейшем будем рассматривать ряды вида (2).

Теорема 1. *(Абель)*
Если степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{3}$$

сходится при $x = x_0 \neq 0$, то он сходится и притом абсолютно при любом x, для которого $|x| < |x_0|$.

Доказательство. Пусть ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n \tag{4}$$

сходится. Тогда $\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$ и потому последовательность $\{a_n x_0^n\}$ ограничена, т.е. существует такая постоянная $M > 0$, что $|a_n x_0^n| \leqslant M$ $(n = \overline{0,\infty})$. В силу этого для n-го члена ряда (3) имеем

$$|a_n x|^n = |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leqslant M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n.$$

Если $|x| < |x_0|$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |\frac{x}{x_0}|^n$, являясь геометрической прогрессией со знаменателем $q = |\frac{x}{x_0}| < 1$, сходится. Поэтому по признаку сравнения сходится и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$, а это означает абсолютную сходимость ряда (3) при $|x| < |x_0|$.

$\square$

Следствие 1. *Если степенной ряд (3) расходится или сходится не абсолютно при $x = x_0$, то он расходится при всяком x, для которого $|x| > |x_0|$.*

Доказательство. Действительно, если $|x| > |x_0|$ и ряд (4) расходится или сходится не абсолютно, то расходится и ряд (3), так как если бы он сходился, то по теореме 1 абсолютно сходился бы и ряд (4).

$\square$

Рассмотрим вопрос об области сходимости степенного ряда. Заметим, что в точке $x = 0$ каждый степенной ряд сходится и его сумма равна a_0. Возможны три случая.

1. Степенной ряд (3) может сходится только в одной точке $x = 0$.
Например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$ сходится только при $x = 0$, так как , если $x \neq 0$, то последовательность $\{n^n x^n\} = \{(nx)^n\}$ не стремится к нулю ($n|x| > 1$, начиная с некоторого n).

2.Степенной ряд (3) может сходится при любом значении x , т.е. на всей вещественной прямой.
Например, возьмём ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x^{n+1}|n!}{(n+1)!|x|^n} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1,$$

то по признаку Даламбера ряд (3) абсолютно сходится при любом x.

3.Степенной ряд (3) может иметь точку сходимости отличную от нуля и точку расходимости.
Например, ряд геометрической прогрессии

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + ...$$

сходится при $x = \frac{1}{2}$ и расходится при $x = 2$.

Последний случай рассмотрим более подробно. Пусть ряд (3) имеет точку сходимости отличную от нуля и точку расходимости. Следовательно, по теореме Абеля и следствию 1 существуют бесконечные множества точек сходимости и точек расходимости.

Возьмем какую-нибудь положительную точку сходимости r_1 и положительную точку расходимости R_1. Ясно, что $r_1 < R_1$. Если $\frac{r_1+R_1}{2}$ является точкой сходимости, то положим $r_2 = \frac{r_1+R_1}{2}$, $R_2 = R_1$, если же $\frac{r_1+R_1}{2}$ точка расходимости, то положим $r_2 = r_1$, $R_2 = \frac{r_1+R_1}{2}$. Аналогично введем точки r_3, R_3 и т.д. В результате получаем две монотонные последовательности $r_1 \leqslant r_2 \leqslant r_3 \leqslant ...$ и $R_1 \geqslant R_2 \geqslant R_3 \geqslant ....$ Первая последовательность является последовательностью точек сходимости ряда, вторая - последовательностью точек расходимости. Эти последовательности сходятся как монотонные и ограниченные. При этом они имеют общий предел, так как

$$R_n - r_n = \frac{R_1 - r_1}{2^{n-1}} \to 0.$$

Обозначим через $R = \lim r_n = \lim R_n$ и докажем, что в интервале $|x| < R$ ряд сходится и даже абсолютно, а вне этого интервала, т.е. при $|x| > R$ ряд расходится.

Действительно, пусть x лежит внутри интегвала $|x| < R$. Тогда при достаточно большом n выполняется неравенство $|x| < r_n$. Если учесть, что r_n точка сходимости ряда, то по теореме Абеля ряд абсолютно сходится в точке x. Если же x лежит вне интервала, т.е. $|x| > R$, то при достаточно большом n имеет место неравенство $|x| > R_n$. Так как в точке R_n ряд расходится, то по следствию 1 ряд расходится и в точке x.

Таким образом, ряд сходится абсолютно внутри интервала радиуса R с центром в точке $x = 0$ и расходится при $|x| > R$. Этот интервал называется интервалом сходимости степенного ряда.

О сходимости степенного ряда при x, для которого $|x| = R$ (на границе интервала сходимости) в общем случае ничего сказать нельзя. Здесь в зависимости от ряда могут представляться различные случаи.

Таким образом, областью сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ является интервал с центром в точке $x = 0$ и, быть может, одна или обе граничные точки интервала. Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится только в одной точке $x = 0$, то полагают $R = 0$, если же степенной ряд сходится в любой точке x, то полагают $R = +\infty$ и говорят, что в первом случае область сходимости вырождается в точку, а во втором случае является всей вещественной прямой.

1.2 Характер сходимости степенного ряда.

Теорема 2. *Степенной ряд (3) сходится равномерно на любом отрезке, лежащим внутри интервала сходимости.*

Доказательство. Пусть отрезок $[a, b]$ лежит внутри интервала сходимости $(-R, R)$ ряда (3). Тогда найдётся такое число $r \in (0, R)$, что отрезок $[-r, r]$ будет содержать отрезок $[a, b]$. Ряд (3) абсолютно сходится при $x = r$, т.е. сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$. Но для всех $x \in [-r, r]$ выполняется неравенство $|a_n x^n| \leqslant |a_n| r^n$ и потому ряд (3) на отрезке $[-r, r]$ мажорируется сходящимся числовым рядом $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$.

Следовательно, по признаку Вейерштрасса ряд (1) равномерно сходится на этом отрезке, в частности, он равномерно сходится и на отрезке $[a, b]$.

□

Отметим, что сходимость ряда (3) на его интервале сходимости $(-R, R)$ может быть и неравномерной. Так, например, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ на интервале $(-1, 1)$ сходится неравномерно.

Как следствие доказанной теоремы и утверждения о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда, членами которого являются непрерывные функции, получаем теорему 3.

Теорема 3. *Сумма степенного ряда является непрерывной функцией на интервале сходимости.*

Доказательство. Пусть x_0-точка интервала сходимости ряда (3). Рассмотрим какой-либо отрезок $[a, b]$, принадлежащий интервалу сходимости, внутри которого находится точка x_0. Ряд равномерно сходится на $[a, b]$. Следовательно, сумма ряда есть непрерывная функция на $[a, b]$. В частности, сумма ряда непрерывна в точке x_0. В силу произвольности выбора точки x_0 из интервала сходимости получаем, что сумма ряда является непрерывной функцией на интервале сходимости.

□

1.3 Интегрирование и дифференцирование степенного ряда.

Теорема 4. *Степенной ряд можно почленно интегрировать по любому отрезку $[a, b]$, принадлежащему интервалу сходимости. В частности, ряд можно почленно интегрировать в пределах от 0 до x, где $|x| < R$.*

Доказательство. Степенной ряд равномерно сходится на любом отрезке $[a, b]$, принадлежащем интервалу сходимости ряда. Заключение теоремы 4 следует сразу из теоремы об интегрировании равномерно сходящихся функциональных рядов.

□

Рассмотрим теперь вопрос о дифференцировании степенных рядов.

Пусть степенной ряд (3) сходится в интервале $(-R, R)$, а ряд

$$a_1 + 2a_2 x + ... + n a_n x^{n-1} + ... \tag{5}$$

получен из ряда (3) дифференцированием его членов.

Лемма 1. *Ряд (5) имеет тот же интервал сходимости, что и ряд (3).*

Доказательство. Пусть x_0-произвольная точка интервала сходимости ряда (3), т.е. $|x_0| < R$. Возьмём число r, удовлетворяющее условию $|x_0| < r < R$. Оценим модуль общего члена ряда (5) в рассматриваемой точке x_0. Имеем

$$|na_n x_0^{n-1}| \leqslant |a_n r^n| \, \frac{n|x_0|^{n-1}}{r^n}.$$

Ряд (3) абсолютно сходится в точке r, т.е. сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ и, следовательно, $\lim_{n\to\infty} |a_n| r^n = 0$. Значит, последовательность $\{|a_n| r^n\}$ ограничена, т.е. $|a_n| r^n < M$ при $n \in N$, где $M \in \mathbb{R}$. Учитывая это, находим

$$|na_n x_0^{n-1}| \leqslant M \, \frac{n|x_0|^{n-1}}{r^n}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n|x_0|^{n-1}}{r^n} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$
сходится, так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim \frac{(n+1)}{n} \frac{|x_0|}{r} = \frac{|x_0|}{r} < 1.$$

Используя теорему сравнения, получаем сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |na_n x_0^{n-1}|$$

или, что то же, абсолютную сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ в точке x_0. В силу произвольности выбора точки x_0 из интервала $(-R, R)$, заключаем, что ряд (5) имеет интервал сходимости не меньший интервала сходимости ряда (3). Докажем, что интервал сходимости ряда (5) не больше интервала сходимости ряда (3). Допустим противное, а именно допустим, что ряд (5) сходится в интервале $(-R_1, R_1)$, где $R_1 > R$. Так как ряд (5) степенной, его можно почленно интегрировать в пределах от 0 до x, где $|x| < R_1$. Ряд, полученный в результате интегрирования, сходится в интервале $(-R_1, R_1)$. Он отличается от ряда (3) только на постоянное слагаемое. Следовательно, и ряд (3) сходится в интервале $(-R_1, R_1)$, что противоречит допущению $R_1 > R$.

□

Теорема 5. *Степенной ряд в интервале сходимости можно почленно дифференцировать, т.е. если*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_k x^k$$

сходится в интервале $(-R, R)$*, то*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$$

сходится в том же интервале.

Доказательство. Пусть $x_0 \in (-R, R)$. Возьмём произвольный отрезок $[a, b]$, внутри которого находится точка x_0. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится к $f(x)$ на $[a, b]$. Ряд из производных его членов равномерно сходится на этом отрезке, так как это степенной ряд с интервалом сходимости $(-R, R)$. Тогда по теореме о дифференцировании функциональных рядов сумма ряда из производных равна $f'(x)$ на $[a, b]$, а следовательно, и в точке x_0. Ввиду произвольности выбора x_0 из $(-R, R)$ теорема доказанна.

$\square$