В.В. Жук, А.М. Камачкин

3 Формула Тейлора. Различные формы записи остаточного члена.

3.1 Формула Тейлора для многочленов.

Пусть P - многочлен степени не выше n:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n.$$

Дифференцируя его n раз находим

$$P'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + ... + n \cdot a_n x^{n-1},$$
$$P"(x) = 1 \cdot 2a_2 + 2 \cdot 3a_3 x + ... + (n-1) \cdot n \cdot a_n x^{n-2},$$
$$..........................$$
$$P^{(n)}(x) = 1 \cdot 2...n \cdot a_n.$$

Полагая во всех этих формулах $x = 0$, получаем

$$a_0 = P(0),\ a_1 = \frac{P'(0)}{1!},\ a_2 = \frac{P"(0)}{2!},\ ...\ a_n = \frac{P^{(n)}(0)}{n!}. \tag{1}$$

Таким образом,

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Пусть теперь

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k (x - x_0)^k.$$

Полагая $x = x_0 + \gamma$, $P(x_0 + \gamma) = Q(\gamma)$, по доказанному имеем

$$A_k = \frac{Q^{(k)}(0)}{k!} = \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Следовательно,

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k. \tag{2}$$

Формула (2), так же как и её частный случай (при $x = 0$) (1) , называется формулой Тейлора для многочлена P (формулу (1) часто называют также формулой Маклорена).

Замечание 1. *Если*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_k}{k!}(x-x_0)^k, \text{ то } C_k = P^{(k)}(x_0) \text{ при } k = \overline{0,n}\,.$$

3.2 Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

Пусть дана функция f, имеющая в некоторой точке x_0 производную n-го порядка. Это значит, что функция определена и имеет производные всех порядков до $n-1$ включительно в некотором отрезке $[a,b]$, содержащем точку x_0 и, кроме того, имеет производную n-го порядка в самой точке x_0 (если x_0 является одним из концов $[a,b]$, то, говоря о производных в этой точке, имеют в виду односторонние производные).

Составим полином $P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$.

Согласно замечанию 1 имеем $P^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \qquad (k = \overline{0,n})$.

Положим $r(x) = f(x) - P(x)$.

Очевидно, что $r^{(k)}(x_0) = 0$ при $k = \overline{0,n}$.

Применяя $n-1$ раз правило Лопиталя и принимая во внимание определение производной, имеем

$$\lim_{x\to x_0} \frac{r(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{r'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} = ... =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{r^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{r^{(n-1)}(x) - r^{(n-1)}(x_0)}{n!(x-x_0)} = \frac{r^n(x_0)}{n!} = 0\,.$$

Таким образом $r(x) = o((x-x_0)^n)$ при $x \to x_0$, т.е. $r(x)$ – величина более высокого порядка малости, чем $(x-x_0)^n$.

Итак, доказано.

Теорема 1. *Пусть функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ имеет в точке x_0 производную n-го порядка. Тогда при $x \to x_0$*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n). \tag{3}$$

Если $x_0 = a$ или $x_0 = b$, то под производными понимаются соответствующие односторонние производные.

3.3 Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

Пусть функция f определена на отрезке $[x_0, x_0+\Delta]$ $(\Delta > 0)$ и имеет там непрерывную производную n-го порядка и, кроме того, по крайней мере на интервале $(x_0, x_0+\Delta)$ существует производная $n+1$-го порядка (случай, когда f задана на $[x_0-\Delta, x_0]$ рассматривается аналогично). Положим

$$r_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \tag{4}$$

и, фиксировав $x \in [x_0, x_0 + \Delta]$, по образцу правой части (4) составим вспомогательную функцию

$$\varphi(z) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(z)}{k!}(x - z)^k$$

переменной z. На отрезке $[x_0, x]$ функция φ непрерывна, $\varphi(x_0) = r_n(x),\ \varphi(x) = 0$ и, кроме того, в интервале (x_0, x) существует производная

$$\varphi'(z) = -f'(z) - \left[\frac{f''(z)}{1!}(x - z) - f'(z)\right] - \left[\frac{f^{(III)}(z)}{2!}(x - z)^2 - \frac{f''(z)}{1!}(x - z)\right] -$$

$$\left[\frac{f^{(IV)}(z)}{3!}(x - z)^3 - \frac{f^{(III)}(z)}{2!}(x - z)^2\right] - ... - \left[\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x - z)^n - \frac{f^{(n)}(z)}{(n-1)!}(x - z)^{n-1}\right]$$

или, после упрощения,

$$\varphi'(z) = -\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x - z)^n.$$

Положим $\psi(z) = (x - z)^{n+1}$. К функциям φ и ψ применим формулу Коши

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\psi(x) - \psi(x_0)} = \frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)}\,,$$

где $c \in (x_0, x)$ или $c = x_0 + \theta(x - x_0)$, где $\theta \in (0, 1)$.

Так как $\varphi(x) = 0,\ \varphi(x_0) = r_n(x),\ \psi(x) = 0,\ \psi(x_0) = (x - x_0)^{n+1}$, $\varphi'(c) = -\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x - c)^n,\ \psi'(c) = -(n + 1)(x - c)^n$, то

$$r_n(x) = \frac{\psi(x) - \psi(x_0)}{\psi'(c)}\ \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x - c^n) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Это выражение называется остаточным членом в форме Лагранжа.

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа имеет вид

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

где $c = x_0 + \theta(x - x_0),\ 0 < \theta < 1$.

3.4 Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.

Теорема 2. *Пусть функция f имеет непрерывную производную $n+1$-го порядка на интервале (x_0-h, x_0+h) , где $h>0$. Тогда остаточный член $r_n(x)$ (см. (4)) для $x \in (x_0-h, x_0+h)$ может быть записан в виде*

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt. \tag{5}$$

Формула (5) называется остаточным членом формулы Тейлора в интегральной форме.

Доказательство. Так как

$$f(x)-f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)dt = -\int_{x_0}^{x} f'(t)d(x-t)\,,$$

то, интегрируя по частям, имеем

$$f(x)-f(x_0) = -f'(t)(x-t)|_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)dt = f'(x_0)(x-x_0) + \int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)dt.$$

Пусть для некоторого $m \leqslant n$ уже доказано, что

$$f(x)-f(x_0) = \sum_{k=1}^{m-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{(m-1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(m)}(t)(x-t)^{m-1}dt. \tag{6}$$

Интегрируя по частям последнее слагаемое, находим, что

$$\frac{1}{(m-1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(m)}(t)(x-t)^{m-1}dt = -\frac{1}{m!}\int_{x_0}^{x} f^{(m)}(t)d(x-t)^m =$$

$$= -\frac{f^{(m)}(t)(x-t)^m}{m!}|_{x_0}^{x} + \frac{1}{m!}\int_{x_0}^{x} f^{(m+1)}(t)(x-t)^m dt =$$

$$= \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m + \frac{1}{m!}\int_{x_0}^{x} f^{(m+1)}(t)(x-t)^m dt.$$

Подставляя это выражение в (6), получаем ту же формулу с заменой m на $m+1$. Таким образом, формула (6) доказана по индукции для всех $m \leqslant n$. При $m=n$ она приводит к соотношению (5).

□

Следствие 1. *В условиях теоремы 2*

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\,,$$

где $c = x_0 + \theta(x-x_0), 0<\theta<1$.

Доказательство. Применяя обобщенную теорему о среднем, имеем

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

□

3.5 Сравним между собой различные формы остаточных членов.

Остаточный член в форме Пеано получен при наименьших ограничениях на функцию: требуется существование n-ой производной только в одной точке. Однако, он не позволяет количественно оценить погрешность приближенной формулы

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Остаточный член в форме Пеано удобен при изучении вопросов, связанных с предельным переходом. Остаточный член в форме Лагранжа часто позволяет получить даже количественную оценку погрешности. С другой стороны, в сравнении с формой Пеано он установлен при более жёстких ограничениях. Кроме того, его запись содержит точку, положение которой как правило точно не известно. Следует отметить, что остаточный член в форме Лагранжа применяется наиболее часто. Интегральная форма содержит полную информацию об остаточном члене. Её недостатком по отношению к формам Пеано и Лагранжа является то обстоятельство, что она требует более тяжёлых ограничений на функцию.