В.В. Жук, А.М. Камачкин

2 Дифференцируемость функций многих переменных. Дифференцируемость функции в точке. Достаточные условия дифференцируемости в терминах частных производных. Дифференцирование сложной функции.

2.1 Дифференцируемость функции в точке.

Рассмотрим сначала случай двух переменных. Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности $S = S(M_0, \delta)$ точки $M_0 = (x_0, y_0)$ и пусть $M = (x, y) \in S, \Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0$ и, значит, $\rho = \rho(M, M_0) = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < \delta$. Положим $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$.

Определение 1. *Функция $z = f(x, y)$ называется дифференцируемой в точке (x_0, y_0), если существуют два числа A и B такие, что*

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y), \tag{1}$$

где при $\rho \neq 0$

$$\alpha(\Delta x, \Delta y) = \varepsilon(\Delta x, \Delta y)\rho, \qquad \lim_{\rho \to 0} \varepsilon(\Delta x, \Delta y) = 0. \tag{2}$$

В случае дифференцируемости функции f в точке (x_0, y_0) линейная функция $A\Delta x + B\Delta y$ переменных Δx и Δy называется дифференциалом функции f в точке (x_0, y_0) и обозначается dz. Таким образом,

$$dz = A\Delta x + B\Delta y\,.$$

Вместо Δx и Δy употребляются так же равнозначные обозначения dx и dy, т.е. пишут

$$dz = Adx + Bdy.$$

Из (2) следует, что

$$\lim_{M \to M_0} \frac{\alpha(\Delta x, \Delta y)}{\rho} = 0. \tag{3}$$

Функция $\alpha(\Delta x, \Delta y)$, обладающая свойством (3) обозначается по аналогии с функциями одной переменной $o(\rho)$ при $\rho \to 0$. Используя это обозначение, определение дифференцируемости можно переписать в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho). \tag{4}$$

Лемма 1. *Условие (2) эквивалентно условию*

$$\alpha(\Delta x, \Delta y) = \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y,\ \rho \neq 0\,, \tag{5}$$

где

$$\lim_{\rho\to 0} \varepsilon_1 = \lim_{\rho\to 0} \varepsilon_2 = 0\,.$$

Доказательство. Пусть выполнено (2), т.е. $\alpha = \varepsilon\rho$ где $\varepsilon \to 0$ при $\rho \to 0$. Тогда

$$\alpha = \varepsilon\rho = \frac{\varepsilon\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}\Delta x + \frac{\varepsilon\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}\Delta y = \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y\,,$$

где

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}\,, \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}\,.$$

Так как

$$\left|\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}\right| \leqslant 1\,, \left|\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}\right| \leqslant 1\,,$$

то $|\varepsilon_1| \leqslant |\varepsilon|, |\varepsilon_2| \leqslant |\varepsilon|$ и, следовательно, $\lim_{\rho\to 0} \varepsilon_1 = \lim_{\rho\to 0} \varepsilon_2 = 0$. Тем самым представление (5) получено. Пусть теперь выполнено условие (5), т.е. $\alpha = \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y, \rho \neq 0$, где $\varepsilon_1 \to 0$ и $\varepsilon_2 \to 0$ при $\rho \to 0$. Тогда

$$\alpha = \left(\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}\,\varepsilon_1 + \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}\,\varepsilon_2\right)\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \varepsilon\rho,$$

где

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}\,\varepsilon_1 + \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}\,\varepsilon_2,$$

и, значит, $|\varepsilon| \leqslant |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2|$. Поэтому $\varepsilon \to 0$ при $\rho \to 0$, т.е. представление (2) получено.

□

Теорема 1. *Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Так как $|\Delta x| \leqslant \rho$ и $|\Delta y| \leqslant \rho$, то из (1) и (2) следует, что $\lim_{\rho\to 0} \Delta z = 0$, а это и означает непрерывность функции в точке (x_0, y_0).

□

Теорема 2. *Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0) и $dz = A\Delta x + B\Delta y$ ее дифференциал в этой точке, то в этой точке у функции f существуют все частные производные и*

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = A, \qquad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = B. \tag{6}$$

Таким образом,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Доказательство. Согласно определению дифференцируемости

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y,$$

где $\lim_{\rho\to 0} \varepsilon_1 = \lim_{\rho\to 0} \varepsilon_2 = 0$. Полагая $\Delta y = 0$, получим

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) =: \Delta_x z = A\Delta x + \varepsilon_1 \Delta x,$$

где $\lim_{\Delta x\to 0} \varepsilon_1 = 0$. Значит

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A + \varepsilon_1. \tag{7}$$

Правая часть (7) при $\Delta x \to 0$ стремится к A, поэтому и левая часть при $\Delta x \to 0$ имеет тот же предел, а это означает, что в точке (x_0, y_0) существует частная производная $\partial z/\partial x = A$. Аналогично, полагая $\Delta x = 0$ и переходя к пределу при $\Delta y \to 0$, получим $\partial z/\partial y = B$.

$\square$

Отметим, что из непрерывности в данной точке функции n переменных не вытекает существование у нее в этой точке частных производных. Важно заметить, что при $n \geqslant 2$ из существования даже всех частных производных в некоторой точке не следует непрерывность в этой точке.

Чтобы убедиться в этом рассмотрим функцию $f(x, y)$ равную нулю, если $xy = 0$ и 1, если $xy \neq 0$. Очевидно, $f(x, 0) = f(0, y) = 0$ и значит

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0.$$

Однако, эта функция разрывная в точке (0,0), так как, например, ее предел вдоль прямой $y = x$ при $(x, y) \to (0, 0)$ равен 1, а $f(0, 0) = 0$.

2.2 Достаточное условие дифференцируемости функции в терминах частных производных.

Теорема 3. *Пусть функция $z = f(x, y)$ в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) имеет частные производные $\partial z/\partial x$ и $\partial z/\partial y$, которые непрерывны в самой точке (x_0, y_0). Тогда функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в этой точке.*

Доказательство. Пусть $S(\delta)$ — δ окрестность точки (x_0, y_0), в которой определена вместе со своими частными производными f'_x и f'_y функция f. Выберем Δx и Δy так, чтобы $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in S(\delta)$. Замечая, что

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \\ &= [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] + [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)], \end{aligned}$$

применим к выражениям, стоящим в квадратных скобках и являющимися приращениями функции только по одной переменной, формулу Лагранжа.

$$\Delta z = f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y)\Delta x + f'_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y)\Delta y, \tag{8}$$

где $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$, причем θ_1 и θ_2 зависят, конечно, от Δx и Δy. Если положить

$$f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) - f'_x(x_0, y_0) = \varepsilon_1,$$

$$f'_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) - f'_y(x_0, y_0) = \varepsilon_2, \tag{9}$$

то, в силу непрерывности частных производных f'_x и f'_y в точке (x_0, y_0), имеем

$$\lim_{\rho \to 0} \varepsilon_1 = \lim_{\rho \to 0} \varepsilon_2 = 0. \tag{10}$$

Подставляя (9) в (8) получаем

$$\Delta z = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y,$$

что в силу выполнения условия (10), и означает дифференцируемость функции f в точке (x_0, y_0).

□

Определение 2. *Функция, имеющая в некоторой точке (и соответственно на некотором множестве) непрерывные частные производные, называется непрерывно дифференцируемой в этой точке (соответственно на множестве).*

2.3

Все определения и утверждения пунктов 2.1 и 2.2 переносятся и на случай функции $y = f(x), x = (x_1, ..., x_n)$, любого числа n переменных, определенной в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$. Например, условие дифференцируемости в данной точке $x^{(0)}$ в общем случае выглядит так:

$$\Delta y = A_1 \Delta x_1 + ... + A_n \Delta x_n + o(\rho), \qquad \rho \to 0, \tag{11}$$

где

$$\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2}\,, \Delta y = f(x_1, ..., x_n) - f(x_1^{(0)}, ..., x_n^{(0)})\,, \Delta x_i = x_i - x_i^{(0)}\;(i = \overline{1, n})\,,$$

причем в этом случае

$$A_i = \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i},\; (i = \overline{1, n})\,.$$

В случае, когда имеет место (11) линейная функция

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\Delta x_1 + ... + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\Delta x_n$$

n переменных $\Delta x_1, ..., \Delta x_n$ (здесь вместо $x^{(0)}$ написано x) называется дифференциалом функции в данной точке x и обозначается $df(x)$:

$$df(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\Delta x_1 + ... + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\Delta x_n$$

Переменные Δx_i называются также дифференциалами переменных x_i и обозначаются $dx_i (i = \overline{1, n})$. В этих обозначениях дифференциал функции f записывается в виде

$$df(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}dx_1 + ... + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}dx_n.$$

Теоремы 1-3 очевидным образом обобщаются на функции n переменных.

2.4 Дифференцирование сложной функции.

Теорема 4. *Пусть функции $x(t)$ и $y(t)$ одного переменного t дифференцируемы в точке t_0 и пусть $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$. Пусть, далее, функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0) и в некоторой окрестности точки t_0 имеет смысл суперпозиция $f(x(t), y(t))$. Тогда функция $z = f(x(t), y(t))$ имеет в точке t_0 производную dz/dt и в этой точке*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{dy}{dt} \tag{12}$$

или, подробнее,

$$\frac{df(x(t_0), y(t_0))}{dt} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\,\frac{dx(t_0)}{dt} + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\,\frac{dy(t_0)}{dt}.$$

Доказательство. В силу дифференцируемости функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0)

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

представимо в виде

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \varepsilon\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}, \tag{13}$$

где функция $\varepsilon = \varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ такова, что

$$\lim_{\rho \to 0} \varepsilon = 0 \qquad (\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}).$$

Доопределим функцию $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ в точке (0,0), положив $\varepsilon(0,0) = 0$. Так доопределенная функция $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ является непрерывной в точке (0,0). Пусть теперь Δt - приращение переменной t и $\Delta x = x(t_0 + \Delta t) - x(t_0), \Delta y = y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)$. Разделим обе части равенства (13) на Δt

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} \pm \varepsilon\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}. \tag{14}$$

При $\Delta t \to 0$, в силу непрерывности функций $x(t)$ и $y(t)$ в точке t_0, получим $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, а значит, и $\lim_{\Delta t \to 0} \rho = 0$. Отсюда по теореме о суперпозиции непрерывных функций

$$\lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon(\Delta x, \Delta y) = 0.$$

Далее,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} = \sqrt{x'^2(t_0) + y'^2(t_0)}.$$

Из всего сказанного следует, что при $\Delta t \to 0$ правая часть (14) стремится к конечному пределу

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt},$$

а потому и левая часть этой формулы, т.е. $\Delta z/\Delta t$ стремится к тому же пределу, а это и означает, что в точке t_0 существует производная dz/dt и выражается формулой (12).

□

Замечание 1. *Хотя в окончательную формулу производной сложной функции входят только производные $\partial z/\partial x$ и $\partial z/\partial y$ функции $z = f(x, y)$, по ходу доказательства существенно использовалось более сильное свойство этой функции, чем существование частных производных, а именно ее дифференцируемость.*

Следствие 1. *Пусть функции $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ определены в некоторой окрестности точки (u_0, v_0), а функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), где $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$ и в некоторой окрестности точки (u_0, v_0) имеет смысл суперпозиция $f(x(u, v), y(u, v))$.*

Если функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке (x_0,y_0) и существуют частные производные $\partial x/\partial u$ и $\partial y/\partial u$ в точке (u_0,v_0), то в точке (u_0,v_0) существует частная производная $\partial z/\partial u$ сложной функции $z=f(x(u,v),y(u,v))$, причем

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}. \tag{15}$$

Доказательство. Фиксируем $v=v_0$ и рассмотрим сложную функцию $z=f(x(u,v_0),y(u,v_0))$ одного переменного u. Согласно теореме 4 получаем, что производная $\partial z/\partial u$ в точке (u_0,v_0) существует и выражается формулой (15). $\square$

Аналогично, если в точке (u_0,v_0) существуют частные производные $\partial x/\partial v$ и $\partial y/\partial v$, то у сложной функции $z=f(x(u,v),y(u,v))$ существует в точке (u_0,v_0) частная производная по v и для нее справедлива формула

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Рассмотрим общий n-мерный случай. Пусть в окрестности точки $x^{(0)}=(x_1^{(0)},...,x_n^{(0)})$ задана функция $y=y(x_1,...,x_n)$, а на некотором множестве $E_t\subset\mathbb{R}^k$ заданы функции $x_i=x_i(t_1,...,t_k)$ $(i=\overline{1,n})$, такие, что $x_i(t_1^{(0)},...,t_k^{(0)})=x_i^{(0)}$. Пусть, далее функция $y=y(x_1,...,x_n)$ дифференцируема в точке $x^{(0)}$ и в точке $t^{(0)}=(t_1^{(0)},...,t_k^{(0)})$ существуют частные производные $\partial x_i/\partial t_j$ $(i=\overline{1,n},j=\overline{1,k})$. Тогда, если в некоторой окрестности точки $t^{(0)}$ имеет смысл сложная функция $y(x(t))$, то она имеет в точке $t^{(0)}$ частные производные $\partial y/\partial t_j$ $(j=\overline{1,k})$, причем

$$\frac{\partial y}{\partial t_j}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t_j}\ (j=\overline{1,k}).$$