Лекции к государственному экзамену по физике

Направление 511600 «Прикладная математика и физика»
(Бакалавриат, ПМ-ПУ СПбГУ)

Лектор: Л.К.Бабаджанянц

Вопрос 26 **Движение твердого тела около неподвижной точки. Динамические и кинематические уравнения Эйлера**

Теорема о кинетическом моменте. Динамические уравнения Эйлера

Кинетический момент $\vec{\mathcal{K}}_O$ твердого тела относительно неподвижной точки O твердого тела равен:

$$\vec{\mathcal{K}}_O = \iiint\limits_D \mu(x,y,z)(\vec{r}\times\vec{v})\,dxdydz \ , \qquad (1)$$

поэтому, используя формулу Эйлера $\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$ и формулу двойного векторного произведения $\vec{r}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = r^2\vec{\omega}-(\vec{r}\vec{\omega})\vec{r}$, получаем:

$$\vec{\mathcal{K}}_O = \iiint\limits_D \mu(x,y,z)(\vec{r}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}))\,dxdydz =$$

$$=\left(\iiint\limits_D \mu(x,y,z)\,r^2 dxdydz\right)\vec{\omega} - \iiint\limits_D \mu(x,y,z)(\vec{r}\vec{\omega})\vec{r}dxdydz \qquad (2)$$

Пусть $\omega_x,\omega_y,\omega_z$ и $\mathcal{K}_x, \mathcal{K}_y, \mathcal{K}_z$ - координаты векторов $\vec{\omega}$ и $\vec{\mathcal{K}}_O$ в подвижном репере. Тогда, проектируя вектор $\vec{\mathcal{K}}_O$ на орты подви-жного репера, получаем:

$$\begin{pmatrix}\mathcal{K}_x\\ \mathcal{K}_y\\ \mathcal{K}_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz}\\ -J_{yx} & J_{yy} & -J_{yz}\\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix}, \text{ то есть } \vec{\mathcal{K}}_O = J\vec{\omega}, \qquad (3)$$

где J - оператор инерции.

В главных осях инерции для точки O матрица оператора J диагональна, и мы получаем:

$$\mathcal{K}_x = J_{xx}\omega_x, \quad \mathcal{K}_y = J_{yy}\omega_y \quad , \quad \mathcal{K}_z = J_{zz}\omega_z \qquad (4)$$

Теорема об изменении кинетического момента $\vec{\mathcal{K}}_O$ твердого тела относительно его неподвижной точки O под действием сил, главный момент которых относительно этой же точки равен $\vec{\mathcal{M}}_O$, выражается равенством:

$$\frac{d}{dt}\vec{\mathcal{K}}_O = \vec{\mathcal{M}}_O \qquad (5)$$

Используя формулу относительной производной, получаем:

$$\frac{d'}{dt}\vec{\mathcal{K}}_O + \vec{\omega}\times\vec{\mathcal{K}}_O = \vec{\mathcal{M}}_O \ , \qquad (6)$$

где $\vec{\omega}$ - угловая скорость твердого тела.

Пусть орты подвижного репера $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, жестко связанного с телом, направлены по главным осям инерции этого тела, и пусть $\omega_x,\omega_y,\omega_z$, $\mathcal{K}_x,\mathcal{K}_y,\mathcal{K}_z$ и M_x,M_y,M_z - координаты векторов $\vec{\omega}$, $\vec{\mathcal{K}}_O$ и $\vec{\mathcal{M}}_O$ в подвижном репере.

Так как $\mathcal{K}_x = J_{xx}\omega_x$, $\mathcal{K}_y = J_{yy}\omega_y$, $\mathcal{K}_z = J_{zz}\omega_z$ (см.(4)), а относительная производная $d'\vec{\mathcal{K}}_O/dt$ - это производная в подвижном репере, то $d'\vec{\mathcal{K}}_O/dt = J_{xx}\dot{\omega}_x\vec{i} + J_{yy}\dot{\omega}_y\vec{j} + J_{zz}\dot{\omega}_z\vec{k}$. Поэтому, проектируя равенство (6) на подвижные орты, получаем:

$$\begin{aligned} &J_{xx}\dot{\omega}_x + (J_{zz}-J_{yy})\omega_y\omega_z = M_x \\ &J_{yy}\dot{\omega}_y + (J_{xx}-J_{zz})\omega_x\omega_z = M_y \ , \qquad (7) \\ &J_{zz}\dot{\omega}_z + (J_{yy}-J_{xx})\omega_x\omega_y = M_z \end{aligned}$$

- это динамические уравнения Эйлера.

Кинематические уравнения Эйлера

Величины M_x, M_y, M_z могут быть функциями не только времени и неизвестных $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ уравнений (7), но также и других переменных. В частности, этими другими переменными могут быть углы Эйлера φ, ψ, ϑ . Для того, чтобы Интегрировать в таких случаях уравнения (7), их необходимо дополнить какими-то уравнениями относительно всех тех переменных, от которых величины M_x, M_y, M_z зависят.

Дифференциальные уравнения относительно углов Эйлера известны из кинематики:

$$\omega_x = \dot{\psi}\sin\varphi\sin\vartheta + \dot{\vartheta}\cos\varphi,\ \ \omega_y = \dot{\psi}\cos\varphi\sin\vartheta - \dot{\vartheta}\sin\varphi,\ \ \omega_z = \dot{\psi}\cos\vartheta + \dot{\varphi}\ , \qquad (8)$$

- их называют *кинематическими уравнениями Эйлера.*