Лекции к государственному экзамену по физике

Направление 511600 «Прикладная математика и физика»
(Бакалавриат, ПМ-ПУ СПбГУ)

Лектор: Л.К.Бабаджанянц

Вопрос 25 Канонические уравнения механики. Уравнение Гамильтона – Якоби. Метод Якоби

Вывод канонических уравнений

В связи с уравнениями Лагранжа второго рода, введем в рассмотрение величины

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i \in [1:s], \qquad (1)$$

которые называют импульсами или обобщенными импульсами.

Как мы знаем, система уравнений Лагранжа состоит из s обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно обобщенных координат $q_1,...,q_s$. Существует бесконечно много способов сведения ее к системе из $2s$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Для этого вместо s переменных вводят $2s$ каких-то новых переменных. В частности, к s переменным $q_1,...,q_s$ можно добавить еще s дополнительных переменных. Мы так и поступили, введя дополнительные переменные $p_1,...,p_s$. Уравнения относительно переменных $q_1,...,q_s$, $p_1,...,p_s$ имеют удобную симметричную форму так называемых *канонических* или *гамильтоновых уравнений*, для которых развита содержательная математическая теория.

Так как $L = T - \Pi$, а потенциальная энергия Π не зависит от обобщенных скоростей $\dot{q}_1,...,\dot{q}_s$, то истинно равенство:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k}, \quad i,k \in [1:s] \qquad (2)$$

Так как

$$\det\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k}\right)\Bigg|_{i,k=1}^{s} \neq 0, \qquad (3)$$

то равенства (1) можно разрешить относительно $\dot{q}_1,...,\dot{q}_s$:

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(q,p,t), \quad i \in [1:s], \quad q = (q_1,...,q_s), \quad p = (p_1,...,p_s) \qquad (4)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$H(q,p,t) = \sum_{k=1}^{s} p_k \dot{q}_k(q,p,t) - L(q,\dot{q}(q,p,t),t), \qquad (5)$$

которую называют *функцией Гамильтона* или *гамильтонианом.*

Используя формулы (1),(2), получаем равенства:

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i + \sum_{k=1}^{s}\left(p_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_i}\right) = \dot{q}_i \quad , \tag{6}$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^{s}\left(p_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}\,, \tag{7}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \sum_{k=1}^{s}\left(p_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial t}\right) - \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \tag{8}$$

при $i \in [1:s]$.

Из уравнений Лагранжа и формул (1) и (7) выводим, что

$$\frac{d}{dt}p_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \;, \quad i \in [1:s]\,, \tag{9}$$

и, присоединяя сюда равенства (6), получаем искомые *канонические* или *гамильтоновы уравнения*:

$$\frac{d}{dt}q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}\,, \quad \frac{d}{dt}p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}\,, \quad i \in [1:s] \tag{10}$$

Равенства (10) задают канонические уравнения алгоритмически. Чтобы выписать канонические уравнения для данной механической системы, необходимо составить для нее по формуле (5) гамильтониан $H(q,p,t)$ и подставить эту функцию в левую часть уравнений (10), произведя там необходимые дифференцирования.

Полный интеграл уравнений в частных производных первого порядка

Равенство

$$\mathcal{F}(x,z,p) = 0 \;, \tag{11}$$

где $x = (x_1,...,x_n)$, $p = (p_1,...,p_n)$, $p_j = \partial z/\partial x_j$, $j \in [1:n]$, рассмотрим как уравнение относительно неизвестной вещественнозначной функции z от n независимых вещественных аргументов $x_1,...,x_n$.

Пусть D - область в R^n. Любая функция z аргумента x, которая обращает равенство (11) в тождество при $x \in D$, называется *интегралом* или *частным интегралом уравнения (1)* в области D. *Полным интегралом уравнения (11) в области D* называют такое его n-параметрическое семейство интегралов

$$z = z(x,a)\,, \quad x \in D\,, \quad a = (a_1,...,a_n) \in A \subset R^n\,, \tag{12}$$

что $z, z'_{x_j} \in C^1(D \times A)$, $j \in [1:n]$, а из равенств

$$z = z(x,a)\,,\; p_1 = z'_{x_1}(x,a)\,,\; .\;.\;.\;,\; p_n = z'_{x_n}(x,a) \tag{13}$$

исключением параметров $a_1,...,a_n$ можно получить уравнение (11).

Отметим, что из этого определения не следует, что, во-первых, полный интеграл определяется уравнением (1) однозначно, и, во вторых, что из полного интеграла может быть получен любой частный интеграл в D. Если функция $\mathcal{F}$ не зависит явно от z, то полный интеграл может быть рассмотрен в виде $z(x,a_1,...,a_{n-1})+a_n$. Если функция $\mathcal{F}$ не зависит явно от неизвестной z и переменных $x_1,...,x_k$, $k<n$, то можно положить

$$z=\sum_{j=1}^{k} a_j x_j + \zeta(x_{k+1},...,x_n) \quad , \tag{14}$$

тогда

$$p_j = a_j,\ j\in[1:k],\ p_{k+j}=\partial\zeta/\partial x_{k+j},\ j\in[1:n-k], \tag{15}$$

и уравнение (10) преобразуется к уравнению вида

$$\Phi(x_{k+1},...,x_n,a_1,...,a_k,\partial\zeta/\partial x_{k+1},...,\partial\zeta/\partial x_n)=0 \ , \tag{16}$$

имеющему полный интеграл вида

$$\zeta(x_{k+1},...,x_n,a_1,...,a_{n-1})+a_n \ , \tag{17}$$

откуда следует, что

$$z=\sum_{j=1}^{k} a_j x_j + \zeta(x_{k+1},...,x_n,a_1,...,a_{n-1})+a_n \tag{18}$$

- полный интеграл уравнения (1).

Уравнение Гамильтона-Якоби. Метод Якоби

Систему обыкновенных дифференциальных уравнений в симметричной форме

$$dx_1/P_1=...=dx_n/P_n=-dp_1/X_1=...=-dp_n/X_n \ , \tag{19}$$

где $P_j=\partial\mathcal{F}/\partial p_j,\ X_j=\partial\mathcal{F}/\partial x_j,\quad j\in[1:n]$,

называют *уравнениями характеристик для уравнения в частных производных первого порядка* вида:

$$\mathcal{F}(x,p)=0 \tag{20}$$

Записав канонические уравнения в симметричной форме

$$\frac{dq_1}{\partial H/\partial p_1}=...=\frac{dq_n}{\partial H/\partial p_n}=-\frac{dp_1}{\partial H/\partial q_1}=...=-\frac{dp_n}{\partial H/\partial q_n}=\frac{dt}{1} \ , \tag{21}$$

можно видеть, что это система уравнений характеристик для уравнения в частных производных вида (20):

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H(q_1,...,q_n,\partial S/\partial q_1,...,\partial S/\partial q_n,t)=0 \tag{22}$$

Равенство (22) называют *уравнением Гамильтона-Якоби*. Неизвестную функцию S аргументов $q_1,...,q_n$ и t называют *главной функцией Гамильтона*. Так как левая часть уравнения

(22) не зависит от S, то его полный интеграл можно записать в виде:

$$S = S(t, q_1, ..., q_n, a_1, ..., a_n) + a_{n+1} \tag{23}$$

Метод Якоби решения канонических уравнений основан на предположении, что известен какой-нибудь полный интеграл вида (23) уравнения (22).

Теорема (Якоби)

Если $D \subset R^{2n+1}$ - область, а $S(t,q,a) \in C^2(D)$ - полный интеграл вида (23) уравнения (22), удовлетворяющий условию

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial a_k}\right)\Big|_{i,k=1}^{n} \neq 0\,, \quad (t,q,a) \in D\,, \tag{24}$$

то существует такая область $D' \subset D \times R^n$, что равенства

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad b = \frac{\partial S}{\partial a}\,, \quad (t,q,a,b) \in D' \tag{25}$$

представляют собой $2n$ независимых интегралов канонических уравнений, где $b = (b_1, ..., b_n)$, как и $a = (a_1, ..., a_n)$, произвольные постоянные.

<u>*Доказательство*</u>

Если $(t_0, q_0, a_0) \in D$, $p_0 = (\partial S / \partial q)\big|_{(t,q,a)=(t_0,q_0,a_0)}$, $b_0 = (\partial S / \partial a)\big|_{(t,q,a)=(t_0,q_0,a_0)}$, то по теореме о неявных функциях, из условия (24) следует, что в некоторой окрестности точки (t_0, q_0, a_0, b_0) равенства (25) однозначно определяют дважды непрерывно дифференцируемые функции p,q аргументов t,a,b. Нам остается доказать, что эти p,q, рассматриваемые как функции времени, удовлетворяют каноническим уравнениям.

Подставим удовлетворяющую равенствам (25) функцию q во вторую группу этих равенств и полученные тождества $b_i = \partial S / \partial a_i$, $i \in [1:n]$ продифференцируем по t:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial a_i} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial q_k \partial a_i} \frac{dq_k}{dt} = 0\,, \quad i \in [1:n] \tag{26}$$

С другой стороны, подставляя полный интеграл S (см.(23)) в уравнение Гамильтона-Якоби (22) и дифференцируя полученное тождество по a_i, приходим к равенствам:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial a_i} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial(\partial S / \partial q_k)} \frac{\partial^2 S}{\partial q_k \partial a_i} = 0\,, \quad i \in [1:n] \tag{27}$$

Вычитая равенства (27) из соответствующих равенств (26) и учитывая равенства (25), получаем, что

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial q_k \partial a_i} \left(\frac{dq_k}{dt} - \frac{\partial H}{\partial p_k} \right) \frac{dq_k}{dt} = 0 \,, \quad i \in [1:n] \tag{28}$$

а из этих равенств и условия (24) следует, что функции p,q (удовлетворяющие равенствам (25)) удовлетворяют первой группе канонических уравнений.

Подставим теперь удовлетворяющую равенствам (25) функцию q в первую группу этих равенств и полученные тождества $p_i = \partial S / \partial q_i$, $i \in [1:n]$ продифференцируем по t:

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_k} \frac{dq_k}{dt} = 0 \,, \quad i \in [1:n] \tag{29}$$

С другой стороны, подставляя полный интеграл S (см.(23)) в уравнение Гамильтона-Якоби (22) и дифференцируя полученное тождество по q_i, приходим к равенствам:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial t} + \frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial (\partial S / \partial q_k)} \frac{\partial^2 S}{\partial q_k \partial q_i} = 0 \,, \quad i \in [1:n] \tag{30}$$

Вычитая равенства (30) из соответствующих равенств (29) и учитывая уже доказанные равенства первой группы кА-нонических уравнений, получаем, что функции p,q (удовлетворяющие равенствам (25)) удовлетворяют второй группе канонических уравнений. Что и требовалось.