Лекции к государственному экзамену по физике

Направление 511600 «Прикладная математика и физика»
(Бакалавриат, ПМ-ПУ СПбГУ)

Лектор: Л.К.Бабаджанянц

<u>Вопрос 24</u> Уравнения Лагранжа второго рода и их разрешимость относительно старших производных

Уравнения Лагранжа II рода, их инвариантность

Будем рассматривать здесь механическую систему из конечного числа материальных точек M_j массы $m_j,\ j \in [1:N]$. Все стесняющие движение системы связи предполагаем независимыми, голономными и идеальными. Символом s будем обозначать ее число степеней свободы положения, а символами $q_1,...,q_s$ - независимые обобщенные координаты, определяющие положение системы.

Так как вариации $\delta q_1,...,\delta q_s$ независимы, то в общем уравнении механики можно положить $\delta q_1 \neq 0, \delta q_2 = ... = \delta q_s = 0$, затем $\delta q_2 \neq 0, \delta q_1 = \delta q_3 = ... = \delta q_s = 0$ и т.д. Это приводит к системе из s обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i = 0\ , \quad i \in [1:s], \qquad (1)$$

которые называют *уравнениями Лагранжа второго рода.* Общий порядок системы (1) равен $2s$. Равенства (1) задают уравнения Лагранжа второго рода алгоритмически. Чтобы для конкретной механической системы выписать их явно, необходимо получить кинетическую энергию T и обобщенные силы Q_i, $i \in [1:s]$ как функции аргументов $q_1,...,q_s$, $\dot{q}_1,...,\dot{q}_s$, t и подставить их в левую часть уравнений (1), произведя там необходимые дифференцирования.

Если все силы, действующие на точки механической системы имеют потенциал, то обобщенные силы можно вычислить по формуле:

$$Q_i = \frac{\partial \Pi(\vec{x}(q,t))}{\partial q_i}, \quad i \in [1:s] \qquad (2)$$

где $\Pi(\vec{x})$ - потенциальная энергия этой системы.

Вводя в рассмотрение *функцию Лагранжа*

$$L = T - \Pi \qquad (3)$$

и учитывая, что $\partial\Pi(\vec{x}(q,t))/\partial\dot{q}_i = 0$, уравнения (1) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \ , \quad i \in [1:s] \qquad (4)$$

Как видим, для того, чтобы выписать уравнения Лагранжа второго рода в случае потенциальных сил, достаточно составить для данной механической системы величину L как функцию аргументов $q_1,...,q_s$, $\dot{q}_1,...,\dot{q}_s$, t и подставить их в левую часть уравнений (4), произведя там необходимые дифференцирования.

Из способа вывода уравнений (1) и (4) следует, что они не изменяют своего алгоритмического вида при замене одних обобщенных координат на другие.

Более специальным свойством является инвариантность уравнений Лагранжа относительно каких-то преобразований. Говорят, что *уравнения Лагранжа второго рода (4) (или (1)) инвариантны относительно какого-то класса преобразований*, если каждое преобразование этого класса не изменяет функцию Лагранжа L (соответственно, кинетическую энергию T и обобщенные силы Q_i, $i \in [1:s]$).

В качестве примера рассмотрим движение материальной точки в центральном силовом поле. Как мы знаем, сила, действующая на точку, имеет потенциал, причем:

$$L = T - \Pi = (mv^2/2) \pm \int \Phi(r)dr \ , \qquad (5)$$

где v - модуль скорости точки, а r - ее расстояние от цент-ра сил. Так как $v = |\vec{v}|$ и $r = |\vec{r}|$, то эти величины не изменяются при поворотах репера, то есть при ортогональных преобразованиях базиса этого репера. Поэтому уравнения Лагранжа второго рода, описывающие движение материальной точки в центральном поле сил инвариантны относительно класса ортогональных преобразований координат (то есть преобразований координат, соответствующих поворотам репера).

Разрешимость уравнений Лагранжа II рода относительно старших производных

Обыкновенные дифференциальные уравнения удобно исследовать и решать приближенно в том случае, когда они разрешены относительно старших производных. Здесь мы покажем, что уравнения Лагранжа второго рода (1) и (4) относительно обобщенных ускорений $\ddot{q}_1,...,\ddot{q}_s$. Достаточно ограничиться рассмотрением уравнений (1), так как они более общие.

Рассмотрим кинетическую энергию механической системы в декартовых координатах:

$$T = \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j \vec{v}_j^{\,2} \tag{6}$$

Из равенств $\vec{v}_j = \sum\limits_{p=1}^{s} \dfrac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_p}\dot{q}_p + \dfrac{\partial \vec{r}_j}{\partial t}$ получаем:

$$T = \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j \left(\sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial t}\right)\left(\sum_{k=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial t}\right) = T_2 + T_1 + T_0\,, \tag{7}$$

где

$$T_2 = \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j \left(\sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i}\dot{q}_i\right)^2 = \tfrac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{s} a_{i,k}\dot{q}_i\dot{q}_k\,, \quad a_{i,k} = a_{k,i} = \sum_{j=1}^{N} m_j \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i}\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_k}\,, \tag{8}$$

$$T_1 = \sum_{p=1}^{s} a_p \dot{q}_p\,, \quad a_p = \sum_{j=1}^{N} m_j \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_p}\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial t}\,, \quad T_0 = \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j \left(\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial t}\right)^2 \tag{9}$$

Принимая во внимание формулы (7),(8),(9), уравнения Лагранжа (1) можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{s} a_{i,k}\ddot{q}_k = B_i\,, \quad i \in [1:s]\,, \tag{10}$$

где величины B_i не зависят от обобщенных ускорений $\ddot{q}_1,\ldots,\ddot{q}_s$. Отсюда следует, что для доказательства разрешимости уравнений Лагранжа второго рода относительно обобщенных ускорений $\ddot{q}_1,\ldots,\ddot{q}_s$ достаточно доказать, что

$$\det A \neq 0\,, \quad A = \left(a_{i,k}\right)\Big|_{i,k=1}^{s} \tag{11}$$

При $u = (u_1,\ldots,u_s)$, рассмотрим квадратичную форму

$$T_2(u) = \tfrac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{s} a_{i,k}u_i u_k\,, \tag{12}$$

и применим к ней *критерий Сильвестра* - для положительной определенности этой формы необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие условия:

$$a_{1,1} > 0, \; \begin{vmatrix} a_{1,1}, \, a_{1,2} \\ a_{2,1}, \, a_{2,2} \end{vmatrix}, \; \ldots \;, \det A > 0 \tag{13}$$

Таким образом, если доказать положительную определенность квадратичной формы T_2, то тем самым будет доказано, в частности, и неравенство (11).

Так как (см. (8))

$$T_2(u) = \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j \left(\sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i}u_i\right)^2\,, \tag{14}$$

то $T_2(u) \geq 0$ при любых u, и нам остается доказать, что $T_2(u) = 0$ только в случае $u = 0$.

Докажем это от противного. Пусть при некотором $u \neq 0$ выполнено равенство $T_2(u) = 0$. Тогда при таком u должны обратиться в ноль все суммы в скобках в равенстве (14), то есть

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} u_i = 0, \quad j \in [1:N], \tag{15}$$

или

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{\partial x_{3j-2}}{\partial q_i} u_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial x_{3j-1}}{\partial q_i} u_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial x_{3j}}{\partial q_i} u_i = 0, \quad j \in [1:N] \tag{16}$$

Из (16) следует, что столбцы матрицы $\left(\partial x_\nu / \partial q_p \right)$ линейно зависимы, а тогда ее ранг должен быть меньше s, в то время, как в п.1 мы доказали, что он равен s. Что и требовалось.