Лекции к государственному экзамену по физике

Направление 511600 «Прикладная математика и физика»
(Бакалавриат, ПМ-ПУ СПбГУ)

Лектор: Л.К.Бабаджанянц

Вопрос 23 Связи в механике. Общее уравнение механики и принцип возможных перемещений

Связи, реакции, идеальные связи. Обобщенные (лагранжевы) координаты

Связями называют условия, которые налагают ограничения на движение механической системы. Эти условия математически выражают в виде равенств или неравенств, связывающих между собой координаты и скорости точек системы и время, а возможно и другие величины, например, ускорения точек.

Связи, как правило, осуществляются в виде тел, стесняющих свободное движение точек системы. В отличие от *свободного*, движение системы, стесненное связями, называют *несвободным*.

Если бы механическую систему не стесняли связи (то есть если бы механическая система была свободной), то под Действием заданных сил она, вообще говоря, двигалась бы с другим ускорением, чем при наличии связей. Это означает, что связи действуют на точки системы как некоторые силы, которые принято называть *реакциями связей.* В отличие от них, заданные силы называют *активными силами.*

Главный вектор, действующих на точку M_j сил реакций связи обозначим $\vec{R}_j$. *Виртуальной работой сил реакций связи* называют величину $\sum_{j=1}^{3N}\vec{R}_j\cdot\delta\vec{r}_j$. Если она равна нулю, то связи называют *идеальными.* Об идеальных связях говорят, что они не препятствуют движению механической системы, совместимому со связями.

Связи классифицируют по тем или иным свойствам изображающих их уравнений. В этой классификации легко сориентироваться по следующей таблице:

Уравнение Связи	Наименование Связи

$$\begin{cases} f(\vec{x},\dot{\vec{x}},t) > 0 \, (<0, \ge 0, \le 0) & - \textit{односторонняя, неудерживающая} \\ f(\vec{x},\dot{\vec{x}},t) = 0 & - \textit{двусторонняя, удерживающая} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(\vec{x},\dot{\vec{x}},t) = 0 \, (>0, <0, \ge 0, \le 0) & - \textit{нестационарная, реономная} \\ f(\vec{x},\dot{\vec{x}}) = 0 \, (>0, <0, \ge 0, \le 0) & - \textit{стационарная, склерономная} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(\vec{x},t) = 0 \, (>0, <0, \ge 0, \le 0) & - \textit{геометрическая, голономная} \\ f(\vec{x},\dot{\vec{x}},t) = 0 \, (>0, <0, \ge 0, \le 0) & - \textit{кинематическая, неголономная} \end{cases}$$

Механическую систему, движение которой стеснено только голономными связями, называют *голономной*, в противном случае – *неголономной*. Пусть на механическую систему наложены голономные связи, выражаемые равенствами:

$$f(\vec{x},t)=0\,, \tag{1}$$

где $f=(f_1,...,f_m)\in C^2(\mathcal{M}\times(t_1,t_2))$, $t_1<t_2$, а $\mathcal{M}$ - область в R^{3N}. При этом мы не исключаем, вообще говоря, что на эту систему могут быть наложены и другие связи, как голономные, так и неголономные. Связи (1) предполагаем независимыми в $\mathcal{M}$, а точнее, предполагаем, что ранг матрицы Якоби $\left(\partial f_i/\partial x_k\right)$ равен m при $\vec{x}\in\mathcal{M}, t\in(t_1,t_2)$.

Пусть $s=3N-m$, а $\mathcal{B}$ - область в R^s. Если заданы функции $\vec{\xi}(q,t)=(\xi_1(q,t),...,\xi_{3N}(q,t))$ аргументов $q=(q_1,...,q_s)\in\mathcal{B}$, $t\in(t_1,t_2)$, дважды непрерывно дифференцируемые на множестве $\mathcal{B}\times(t_1,t_2)$ и удовлетворяющие там равенству $f(\vec{\xi}(q,t),t)=0$, то переменные $q=(q_1,...,q_s)$ называют *лагранжевыми* или *обобщенными координатами*. Если $q=(q_1,...,q_s)$ - какие-то обобщенные координаты, то векторы $\vec{x}=(x_1,...,x_{3N})$, $\vec{r}_j$ можно выразить через них:

$$\vec{x}=\vec{x}(q,t)\,,\quad \vec{r}_j=\vec{r}_j(q,t),\; j\in[1:N]\,, \tag{2}$$

– эти функции удовлетворяют связям (1) и, вообще говоря, не обязаны удовлетворять каким-то другим связям, поэтому обобщенные координаты $q_1,...,q_s$ можно считать независимыми величинами если движение механической системы стеснено только связями (1). В этом случае, s - число степеней свободы положения механической системы и, при $(q,t)\in\mathcal{B}\times(t_1,t_2)$, ранг матрицы Якоби $\left(\partial x_\nu/\partial q_p\right)$ равен s. Действительно, так как эта матрица имеет размеры $(3N-m)\times 3N$, то ее ранг k удовлетворяет неравенству $k\le 3N-m$. С другой стороны, по теореме о неявных функциях, функции $x_1,...,x_{3N}$ должны удовлетворять $3N-k$ независимым уравнениям. Так как рассматриваемая механическая система стеснена только m связями (1), то $3N-k\le m$, то есть $k\ge 3N-m=s$.

Таким образом, из элементов матрицы Якоби $\left(\partial x_\nu/\partial q_p\right)$ можно составить матрицу s - го порядка с ненулевым определителем, а тогда обобщенные координаты $q_1,...,q_s$ можно выразить в виде дважды непрерывно дифференцируемых функций декартовых коор-динат. Из равенств (2) получаем следующие формулы:

$$\dot{x}_\nu=\sum_{p=1}^{s}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_p}\dot{q}_p+\frac{\partial x_\nu}{\partial t},\quad \vec{v}_j=\sum_{p=1}^{s}\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_p}\dot{q}_p+\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial t}\quad,\quad \nu\in[1:3N],\ j\in[1:N] \tag{3}$$

Вариации координат

Введем в рассмотрение понятия истинного и виртуального перемещения. *Истинным перемещением механической системы* мы будем называть ее перемещение $\Delta\vec{x}$ за время от t до $t+\Delta t$. Ес-тественно, что эту величину мы будем обозначать также $\Delta\vec{r}_j$, $j\in[1:N]$. Соответственно, истинное перемещение за бесконечно малый промежуток времени dt есть бесконечно малое перемещение $d\vec{x}$, которое мы обозначаем также $d\vec{r}_j$, $j\in[1:N]$.

Если на механическую систему наложены стесняющие ее движение связи, то в каждый момент t о них естественно судить по совокупности возможных перемещений при этом неизменном значении t, совместимых с уравнениями связей, так как эта совокупность зависит только от положения системы в данный момент и от связей. Любое совместимое со связями бесконечно малое перемещение, которое может быть сообщено механической системе при неизменном t, называют *виртуальным перемещением* этой системы в этот момент. Виртуальное перемещение механической системы будем обозначать $\delta\vec{x}$ и $\delta\vec{r}_j$, $j\in[1:N]$. Иначе говоря, виртуальное перемещение в момент t это допустимая вариация движения при неизменном этом значении t (*изохронная вариация*), причем «допустимая» – означает совместимая с уравнениями связей, стесняющих движение системы.

При наличии связей вариации координат не независимы: если система стеснена голономными связями $f(\vec{x},t)=0$, а $\delta\vec{x}$ – виртуальное перемещение, то наряду с $\vec{x}$ этому равенству должна удовлетворять и величина $\vec{x}+\delta\vec{x}$. Так как

$$f(\vec{x}+\delta\vec{x},t)=\sum_{\nu=1}^{3N}\frac{\partial f}{\partial x_\nu}\delta x_\nu+\ldots, \tag{4}$$

то получаем равенство

$$\sum_{\nu=1}^{3N}\frac{\partial f}{\partial x_\nu}\delta x_\nu=0, \tag{5}$$

с точностью до бесконечно малых высших порядков. Так как

$$f(\vec{x}+d\,\vec{x},t)=\sum_{\nu=1}^{3N}\frac{\partial f}{\partial x_\nu}d\,x_\nu+\frac{\partial f}{\partial t}d\,t+\ldots\ , \tag{6}$$

то для истинного перемещения получаем другое равенство:

$$\sum_{\nu=1}^{3N}\frac{\partial f}{\partial x_\nu}d\,x_\nu+\frac{\partial f}{\partial t}d\,t=0\ , \tag{7}$$

истинное также с точностью до бесконечно малых высших порядков. Как видим, в случае стационарности связей истинное перемещение является одним из виртуальных перемещений.

Понятие виртуальных перемещений или вариаций обобщенных координат вводятся так же, как и в случае декартовых координат: *виртуальным перемещением механической системы в обобщенных координатах* в момент t называют любое бесконечно малое изменение обобщенных координат при неизменном этом значении t, совместимое с наложенными связями ((1) и, возможно, другими).

Из формул (2) получаем:

$$\delta x_\nu=\sum_{p=1}^{s}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_p}\delta q_p\ ,\quad \delta\vec{r}_j=\sum_{p=1}^{s}\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_p}\delta q_p\ ,\quad \nu\in[1:3N],\ j\in[1:N] \tag{8}$$

Если механическая система не стеснена другими связями, кроме (1), то из способа введения обобщенных координат и открытости $\mathcal{B}$ (область в R^s) следует, что изохронные вариации $\delta q_1,\ldots,\delta q_s$ независимы.

Общее уравнение механики и принцип возможных перемещений

Рассмотрим дифференциальные уравнения Ньютона движения механической системы:

$$m_j\frac{d}{dt}\vec{v}_j=\vec{F}_j+\vec{R}_j\,, \tag{9}$$

где $\vec{F}_j$ и $\vec{R}_j$ - главные векторы внешних и внутренних активных сил и сил реакций, действующих на материальную точку M_j массы m_j . Будем предполагать, что все стесняющие рассматриваемую механическую систему связи являются идеальными. Умножая j-ое уравнение (9) скалярно на $\delta\vec{r}_j$ и Суммируя полученные равенства по всем j, получаем:

$$\sum_{j=1}^{N}\left(m_j\frac{d}{dt}\vec{v}_j-\vec{F}_j\right)\cdot\delta\vec{r}_j=0\,, \tag{10}$$

- это *общее уравнение механики в декартовых координатах* (*уравнение Даламбера - Лагранжа*).

Если механическая система *находится в* положении равновесия в данном репере, то скорости всех точек равны нулю, то есть $d\vec{v}_j / dt = 0$, $j \in [1:N]$. В этом случае получаем:

$$\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j \cdot \delta \vec{r}_j = 0 \ , \tag{11}$$

то есть, *сумма всех виртуальных работ активных сил равна нулю, - это* *необходимые условия равновесия в данном репере механической системы, стесненной только голономными идеальными связями.* На самом деле имеет место более сильные результаты, один из которых следующий:

Теорема 2.2.1 (Принцип виртуальных перемещений)

Пусть при $t \in (t_1, t_2)$ *механическая система стеснена только стационарными голономными идеальными связями в виде равенств. Тогда условие (11), то есть равенство нулю суммы всех виртуальных работ действующих на систему активных сил, является необходимым и достаточным условием равновесия этой системы в рассматриваемом репере.*

Равенство (11) называют *общим уравнением статики.*

Общее уравнение механики в лагранжевых координатах

Общее уравнение механики в декартовых координатах (10) мы преобразуем здесь при помощи формул (2),(3),(8) и следующего тождества:

$$\frac{d\vec{v}_j}{dt}\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_p} = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}_j \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_p}\right) - \vec{v}_j \frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_p} \tag{12}$$

Используя формулу (8), получаем:

$$\sum_{j=1}^{N}\left(m_j \frac{d}{dt}\vec{v}_j - \vec{F}_j\right)\sum_{p=1}^{s}\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_p}\delta q_p = 0 \tag{13}$$

Из формулы (3) следует, что

$$\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_p} = \frac{\partial \vec{v}_j}{\partial \dot{q}_p} \tag{14}$$

Сравнивая равенство

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_p} = \sum_{k=1}^{s}\frac{\partial^2 \vec{r}_j}{\partial q_k \partial q_p}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 \vec{r}_j}{\partial t \partial q_p} \tag{15}$$

с равенством

$$\frac{\partial \vec{v}_j}{\partial q_p} = \sum_{k=1}^{s}\frac{\partial^2 \vec{r}_j}{\partial q_k \partial q_p}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 \vec{r}_j}{\partial t \partial q_p} \ , \tag{16}$$

полученным дифференцированием формулы (2) и переменой местами индексов k,p, приходим к равенству:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_p} = \frac{\partial \vec{v}_j}{\partial q_p} \tag{17}$$

Используя формулы (12),(14),(17), выводим равенство:

$$\frac{d\vec{v}_j}{dt}\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_p} = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}_j\frac{\partial \vec{v}_j}{\partial \dot{q}_p}\right) - \vec{v}_j\frac{\partial \vec{v}_j}{\partial q_p} \tag{18}$$

Умножая это равенство на m_j и суммируя по всем $j = 1,...N$, получаем:

$$\sum_{j=1}^{N} m_j \frac{d\vec{v}_j}{dt}\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_p} = \frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{N} m_j\vec{v}_j\frac{\partial \vec{v}_j}{\partial \dot{q}_p} - \sum_{j=1}^{N} m_j\vec{v}_j\frac{\partial \vec{v}_j}{\partial q_p} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_p} - \frac{\partial T}{\partial q_p}\ , \tag{19}$$

где $T = \sum_{j=1}^{N} m_j\vec{v}_j\vec{v}_j / 2 = \sum_{j=1}^{N} m_j v_j^2 / 2$.

Из равенств (13),(19) следует равенство

$$\sum_{p=1}^{s}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_p} - \frac{\partial T}{\partial q_p} - Q_p\right)\delta q_p = 0\,, \tag{20}$$

где величина Q_p, определяемая равенством

$$Q_p = \sum_{j=1}^{N}\vec{F}_j\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_p} = \sum_{\nu=1}^{3N} X_\nu\frac{\partial x_\nu}{\partial q_p} \tag{21}$$

(при очевидных обозначениях X_ν), называется *обобщенной силой,* отвечающей обобщенной координате q_p. Равенство (20) называют *общим уравнением механики* или *уравнением Даламбера-Лагранжа* в обобщенных координатах. Отметим, что в этом уравнении вариации δq_p независимы, если на рассматриваемую механическую систему наложены только связи (1), и могут быть зависимыми, если на нее наложены и другие связи. Если все силы, действующие на точки механической системы имеют потенциал, то компоненты X_ν этих сил можно вычислить по формуле:

$$X_\nu = -\frac{\partial \Pi(\vec{x})}{\partial x_\nu}\ ,\quad \nu \in [1:3N], \tag{22}$$

где $\Pi(\vec{x})$ - потенциальная энергия этой системы.

Из равенств (21),(22) получаем:

$$Q_p = -\sum_{\nu=1}^{3N}\frac{\partial \Pi(\vec{x})}{\partial x_\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_p} = -\frac{\partial \Pi(\vec{x}(q,t))}{\partial q_p} \tag{23}$$