# Лекции к государственному экзамену по физике

Направление 511600 «Прикладная математика и физика»
(Бакалавриат, ПМ-ПУ СПбГУ)

Лектор: Л.К.Бабаджанянц

## **Вопрос 22** Две задачи механики. Уравнения движения и основные законы динамики механической системы

### *Две задачи динамики*

***Первая задача динамики (обратная задача)*** заключается в построении уравнений движения механических систем, состоящих из материальных точек и/или твердых тел, по заданным их движениям и/или свойствам движений в $E^3$ (но, надо отметить, не обязательно в инерциальной системе координат). Различные модели законов сил получены в результате решения подобных задач. В частности, *задача Ньютона*, результатом решения которой явился закон всемирного тяготения, состоит в определении силы, под действием которой планеты (материальные точки) совершают движения вокруг Солнца (материальной точки), удовлетворяющие следующим свойствам (*законам Кеплера*):

- орбиты (траектории движения) планет являются эллипсами, в одном из фокусов которых находится Солнце;
- секторные скорости планет постоянны (если $\Phi$ – фокус Эллипса, в котором расположено Солнце, а $\vec{r}(t)=\overrightarrow{\Phi M(t)}$ – радиус-вектор планеты $M(t)$ в момент $t>t_0$, то ее *секторной скоростью* называют вектор $\vec{\sigma}(t)=\vec{l}\cdot\dot{S}(t)$, где $S(t)$ – площадь фигуры, лежащей в плоскости эллипса между векторами $\vec{r}(t_0)$ и $\vec{r}(t)$ и дугой $\overset{\frown}{M(t_0)M(t)}$ эллипса, а единичный вектор $\vec{l}$, ортогональный плоскости эллипса, равен отношению $\left(\vec{r}(t)\times\dot{\vec{r}}(t)\right)/\left|\vec{r}(t)\times\dot{\vec{r}}(t)\right|$);
- квадраты периодов движения планет по своим эллипсам пропорциональны кубам больших полуосей этих эллипсов

***Вторая задача динамики (прямая задача)*** состоит в определении движений механической системы по известным силам. Применительно к случаю механической системы, состоящей из одной материальной точки, эта задача состоит в нахождении ее движения $\vec{r}(t)$ по известной действующей на нее силе $\vec{F}(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)$ и сводится к решению задачи Коши:

$$m\ddot{\vec{r}}=\vec{F}(\vec{r},\dot{\vec{r}},t),\quad \vec{r}(t_0)=\vec{r}_0,\ \dot{\vec{r}}(t_0)=\dot{\vec{r}}_0$$

### *Уравнения движения механической системы*

Здесь термином механическая или материальная система мы называем конечное множество материальных точек.

Силы взаимодействия между материальными точками механической системы называют *внутренними силами.* Силы, действующие на материальные точки системы, вызванные материальными объектами, не входящими в состав рассматриваемой механической системы, называют *внешними силами.*

Геометрическую сумму всех внешних (внутренних) сил, действующих на материальную точку, называют *главным вектором внешних (внутренних) сил, действующих на эту точку*. Главные векторы внешних и внутренних сил, действующих на материальную точку $M_j$, обозначим символами $\vec{F}_j$ и $\vec{F}_j'$ соответственно, а массу этой точки обозначим $m_j$. Выписывая для всех точек механической системы уравнение Ньютона получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений $m_j\ddot{\vec{r}}_j = \vec{F}_j(\vec{r}_1,...,\dot{\vec{r}}_1,...,t) + \vec{F}_j'(\vec{r}_1,...,\dot{\vec{r}}_1,...,t)$, которые называют *уравнениями движения механической системы.* Когда говорят об уравнениях Ньютона, то имеют в виду именно эти уравнения, описывающие движение механической системы в пространстве $E^3$, но не обязательно в инерциальной системе координат. Как в случае инерциальной, так и в случае неинерциальной системы координат, запись уравнений движения механической системы в этом виде предполагает выполнение второго и третьего закона Ньютона. Это предположение является неотемлемой составной частью механики Ньютона.

Вместо громоздких обозначений $\vec{F}_j(\vec{r}_1,...,\dot{\vec{r}}_1,...,t), \vec{F}_j'(\vec{r}_1,...,\dot{\vec{r}}_1,...,t)$ будем использовать обозначения $\vec{F}_j$, $\vec{F}_j'$ соответственно.

## Основные законы динамики механической системы

***Теорема об изменении главного вектора количества движения*** Введем в рассмотрение векторы

$$\vec{F} = \sum_j \vec{F}_j,\ \vec{F}' = \sum_j \vec{F}_j',\ \vec{Q} = \sum_j m_j\vec{v}_j,$$

где $\vec{v}_j = \dot{\vec{r}}_j$ - скорость точки $M_j$. Эти векторы называют соответственно *главным вектором внешних сил, главным вектором внутренних сил* и *главным вектором количества движения механической системы.* Согласно третьему закону Ньютона, любой внутренней силе механической системы отвечает другая внутренняя сила, уравновешивающая первую, поэтому $\vec{F}' = \vec{0}$.

**Теорема (об изменении главного вектора количества движения):** $\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F},\ d\vec{Q} = \vec{F}dt,\ \vec{Q} - \vec{Q}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{F}dt$

*Доказательство* Ясно, что в этих равенствах представлены три равносильных варианта записи одной и той же формулы, а первую из формул мы получим, если просуммируем уравнения Ньютона для материальной точки $M_j$ по всем $j$ и учтем, что $\vec{F}' = \vec{0}$. Что и требовалось.

Векторы $\vec{F}dt, \int_{t_0}^{t} \vec{F}dt$ называют *элементарным импульсом силы* и *импульсом силы* (на промежутке $[t_0, t]$) соответственно, поэтому эту теорему можно сформулировать в любом из следующих вариантов:

- производная главного вектора количества движения механической системы равна главному вектору сил;
- дифференциал главного вектора количества движения механической системы равен элементарному импульсу силы;
- приращение главного вектора количества движения механической системы равно импульсу силы

## *Уравнение движения центра инерции*

*Центр масс (или центр инерции)* – это точка $C$, радиус-вектор $\vec{r}_c$ которой (относительно некоторой точки $O$) определяется формулой: $m\vec{r}_c = \sum_j m_j \vec{r}_j,\ m = \sum_j m_j$ , где $\vec{r}_j$ - радиус-вектор точки $M_j$ относительно точки $O$. Дифференцируя первое из этих равенств по $t$, получаем $m\dot{\vec{r}}_c = \vec{Q}$. Дифференцируя это равенство по $t$ и учитывая теорему об изменении главного вектора количества движения, приходим к уравнению: $m\ddot{\vec{r}}_c = \vec{F}$.

Этот результат формулируют обычно в виде теоремы.

**Теорема (о движении центра масс)**

*Центр масс механической системы движется так, как двигалась бы материальная точка с массой $m$, равной сумме масс всех точек системы, под действием силы, равной сумме сил, действующих на эти точки*

*Следствие*

*Если сумма всех сил, действующих на точки механической системы, равна нулю, то центр масс системы движется прямолинейно и равномерно*

### ***Кинетический момент относительно неподвижной точки и теорема о его изменении***

Если $O, M$ - точки аффинного пространства и $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, то закрепленный вектор $\mu_O(M, \vec{G}) = (O, \vec{r} \times \vec{G})$ называют моментом закрепленного вектора $(M, \vec{G})$ относительно точки $O$. Ради краткости, этот вектор записывают также $\vec{r} \times \vec{G}$ и называют моментом вектора $\vec{G}$, предполагая, что точки $O, M$ известны по умолчанию. Как и ранее, символами $\vec{r}_j = \overrightarrow{OM_j}$, $\vec{v}_j = \dot{\vec{r}}_j$, $m_j$ обозначим радиус-вектор, скорость и массу материальной точки $M_j$, а символами $\vec{F}_j'$ и $\vec{F}_j$ - главные векторы внутренних и внешних сил, действующих на точку $M_j$.

Векторы $\vec{\mathcal{M}}' = \sum_j \vec{r}_j \times \vec{F}_j', \vec{\mathcal{M}} = \sum_j \vec{r}_j \times \vec{F}_j, \vec{\mathcal{K}} = \sum_j \vec{r}_j \times m_j \vec{v}_j$ называют *главным моментом* соответственно *внутренних сил, внешних сил* и *количества движения механической системы* (относительно неподвижной точки $O$). Последний вектор называют также *кинетическим моментом механической системы* (относительно неподвижной точки $O$).

**Теорема** *Главный момент $\vec{\mathcal{M}}'$ внутренних сил механической системы равен нулю*

<u>*Доказательство*</u> Так как $\vec{F}_j' = \sum_{i \neq j} \vec{F}_{j,i}'$, $\vec{F}_{j,i}' = -\vec{F}_{i,j}'$, где $\vec{F}_{j,i}'$ - сила действия точки $M_i$ на $M_j$, и $(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{i,j}' = \vec{0}$, то получаем:

$$\vec{\mathcal{M}}' = \sum_j \vec{r}_j \times \vec{F}_j' = \sum_j (\vec{r}_j \times \sum_{i \neq j} \vec{F}_{j,i}') = \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} (\vec{r}_i \times \vec{F}_{i,j}' + \vec{r}_j \times \vec{F}_{j,i}') =$$

$$= \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} (\vec{r}_i \times \vec{F}_{i,j}' - \vec{r}_j \times \vec{F}_{i,j}') = \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{i,j}' = \vec{0}$$

**Теорема (Об изменении кинетического момента)**

*Производная кинетического момента механической системы относительно неподвижной точки равна главному моменту внешних сил относительно той же точки, то есть* $\frac{d}{dt}\vec{\mathcal{K}} = \vec{\mathcal{M}}$

<u>*Доказательство*</u> Рассмотрим дифференциальные уравнения Ньютона движения механической системы: $m_j \frac{d}{dt}\vec{v}_j = \vec{F}_j + \vec{F}_j'$. Умножая $j$-ое уравнение слева векторно на $\vec{r}_j$ и суммируя полученные равенства по всем $j$, получаем: $\sum_j \vec{r}_j \times \frac{d}{dt}(m_j \vec{v}_j) = \sum_j \vec{r}_j \times \vec{F}_j$. Диф-

ференцируя $\vec{\mathcal{K}}$ по $t$ и используя это равенство и равенства $\frac{d}{dt}\vec{r}_j = \vec{v}_j$, $\frac{d}{dt}(\vec{r}_j \times \vec{v}_j) = \vec{r}_j \times \frac{d}{dt}\vec{v}_j$, приходим к доказываемому равенству.

### *Изменение кинетического момента, вычисляемого относительно подвижного полюса*

Символами $\vec{r}_A, \vec{v}_A, \vec{w}_A$ обозначим радиус-вектор, скорость и ускорение некоторой точки $A = A(t) \in E^3$, движущейся относительно некоторого репера с началом в точке $O$, и введем в рассмотрение величины: $\vec{\mathcal{M}}_A = \sum_j \left(\vec{r}_j - \vec{r}_A\right) \times \vec{F}_j$, $\vec{\mathcal{K}}_A = \sum_j \left(\vec{r}_j - \vec{r}_A\right) \times m_j \left(\vec{v}_j - \vec{v}_A\right)$. Вектор-функции $\vec{\mathcal{M}}_A$, $\vec{\mathcal{K}}_A$ называют *главным моментом* соответственно *внешних сил* и *количества движения механической системы* относительно подвижного полюса $A$. Последний вектор называют также *кинетическим моментом механической системы* относительно подвижного полюса $A$.

**Теорема (Об изменении кинетического момента)**

*Производная кинетического момента механической системы относительно подвижного полюса $A$ и ее главный момент внешних сил относительно того же полюса связаны равенством:*

$$\frac{d}{dt}\vec{\mathcal{K}}_A + m\left(\vec{r}_c - \vec{r}_A\right) \times \vec{w}_A = \vec{\mathcal{M}}_A$$

Доказательство Так как

$\vec{\mathcal{K}}_A = \vec{\mathcal{K}} - \sum_j m_j \vec{r}_j \times \vec{v}_A - \vec{r}_A \times \sum_j m_j \left(\vec{v}_j - \vec{v}_A\right) = \vec{\mathcal{K}} - \vec{r}_A \times \vec{Q} - m\left(\vec{r}_c - \vec{r}_A\right) \times \vec{v}_A$, то, подставляя $\vec{\mathcal{K}} = \vec{\mathcal{K}}_A + \vec{r}_A \times \vec{Q} + m\left(\vec{r}_c - \vec{r}_A\right) \times \vec{v}_A$ в равенство $\frac{d}{dt}\vec{\mathcal{K}} = \vec{\mathcal{M}}$ получаем: $\frac{d}{dt}\vec{\mathcal{K}}_A = \vec{\mathcal{M}} - \vec{v}_A \times \vec{Q} - \vec{r}_A \times \dot{\vec{Q}} - m\vec{v}_c \times \vec{v}_A - \left(\vec{r}_c - \vec{r}_A\right) \times \vec{w}_A$. Используя здесь формулы $\vec{\mathcal{M}} = \sum_j \vec{r}_j \times \vec{F}_j$, $\dot{\vec{Q}} = \sum_j \vec{F}_j$, $m\vec{v}_c = \vec{Q}$, доказываем теорему.

Следствие *Если при любом $t$ полюс $A = A(t)$ совпадает с центром масс системы или движется прямолинейно и равномерно, то доказанное равенство совпадает по форме с аналогичной теоремой относительно неподвижного полюса.*

### *Работа силы и изменение кинетической энергии материальной точки*

Рассмотрим уравнение движения в $E^3$ материальной точки $M$ массы $m$, на которую действует сила $\vec{F}$: $m\dfrac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}$ и пусть $v=|\vec{v}|$, а $T=mv^2/2$ -*кинетическая энергия* материальной точки $M$. Умножая это уравнение скалярно на $d\vec{r}$, получаем равенство: $dT=\vec{F}d\vec{r}$. Мы получили, что дифференциал кинетической энергии материальной точки равен *элементарной работе* главного вектора сил, приложенных к этой точке. Это равенство называют *теоремой об изменении кинетической энергии материальной точки в дифференциальной форме*.

Вместо этого равенства, записанного в терминах бесконечно малых величин, можно, разделив его на $dt$, получить равенство относительно конечных величин: $\dfrac{dT}{dt}=\vec{F}\vec{v}$.

Пусть $M_0=M(t_0)$, $M=M(t)$ при $t>t_0$, а $\overset{\frown}{M_0M}$ - дуга траектории между этими положениями рассматриваемой материальной точки. Символами $X,Y,Z$ обозначим координаты вектора $\vec{F}$ в рассматриваемом репере (их называют *компонентами силы* $\vec{F}$ в этом репере). Считая траекторию точки и силу на траектории кусочно-гладкими и взяв криволинейный интеграл от равенства $dT=\vec{F}d\vec{r}$ по дуге $\overset{\frown}{M_0M}$, получаем:

$$T-T_0=A,\ \ A=\int\limits_{\overset{\frown}{M_0M}}\vec{F}d\vec{r}=\int\limits_{\overset{\frown}{M_0M}}\left(Xdx+Ydy+Zdz\right), \tag{*}$$

где $T_0=T\big|_{t=t_0}$. Величину $A$ называют *работой по перемещению материальной точки* под действием силы $\vec{F}$ из точки $M_0$ в точку $M$ вдоль дуги $\overset{\frown}{M_0M}$.

Если задать дугу $\overset{\frown}{M_0M}$ в параметрической форме, то есть если $\vec{r}$ задать как функцию какого-то параметра, то работу можно записать как определенный интеграл по этому параметру. В качестве параметра обычно используют время $t$ или естественную координату $s$. Выпишем соответствующие формулы:

$A=\int\limits_{t_0}^{t}\vec{F}\vec{v}\,dt$, $A=\int\limits_{s_0}^{s}\vec{F}\vec{\tau}\,ds=\int\limits_{s_0}^{s}F\cos\angle(\vec{F},\vec{v})\,ds$, где $F=|\vec{F}|$, а $\vec{\tau}=\vec{v}/v$.

Первая из этих формул получается, например, интегрированием равенства $\dfrac{dT}{dt}=\vec{F}\vec{v}$ по $t$ от $t_0$ до $t$, а вторую можно получить из первой заменой $t$ на $s$ с учетом формул $ds/dt=v,\ d\vec{r}/ds=\vec{\tau}$. Еще проще вторую формулу можно получить из

(*) заменив $d\vec{r}$ на $\vec{\tau}\,ds$, а интеграл по дуге на определенный интеграл по $s$ от $s_0$ до $s$.

Производную $N = \dfrac{dA}{dt} = \vec{F}\,\vec{v}$ называют *мощностью и г*оворят, что мощность характеризует интенсивность выполнения работы $A$ силой $\vec{F}$. Используя понятие мощности и равенство $\dfrac{dT}{dt} = \vec{F}\,\vec{v}$ можно сказать, что *производная кинетической энергии материальной точки равна мощности работы,выполняемой главным вектором сил, действующих на эту точку*. Это еще одна формулировка теоремы об изменении кинетической энергии материальной точки.

### ***Теорема об изменении кинетической энергии механической системы***

Рассмотрим движение относительно репера $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ в $E^3$ механической системы из конечного числа точек $M_j$, имеющих массы $m_j$ и, как и ранее, обозначим символами $\vec{r}_j, \vec{v}_j, v_j, T_j$, положение, скорость, величину скорости и кинетическую энергию точки $M_j$, а символом $T$ - кинетическую энергию всей механической системы.

Главные векторы внешних и внутренних сил, действующих на материальную точку $M_j$, обозначим символами $\vec{F}_j$ и $\vec{F}'_j$ соответственно, а символами $X_j, Y_j, Z_j$, $X'_j, Y'_j, Z'_j$ обозначим координаты этих векторов в рассматриваемом репере. Кроме того, будем использовать обозначения $M_{j,0} = M_j(t_0)$, $M_j = M_j(t)$ при $t > t_0$, а символом $\overset{\frown}{M_{j,0}M_j}$ обозначим дугу траектории между этими положениями материальной точки $M_j$.

Обратимся к дифференциальным уравнениям Ньютона движения механической системы:

$$m_j \frac{d}{dt}\vec{v}_j = \vec{F}_j + \vec{F}'_j \tag{1}$$

Используя эти уравнения по отдельности, для каждой точки $M_j$ можно получить равенства, аналогичные равенствам, выражающим различные формулировки теоремы об изменении кинетической энергии материальной точки. Суммируя каждое из них по всем точкам, то есть по всем $j$, получаем:

$$dT = \delta A + \delta' A\ , \quad \delta A = \sum_j \vec{F}_j d\,\vec{r}_j\ , \quad \delta' A = \sum_j \vec{F}'_j d\,\vec{r}_j\ , \tag{2}$$

$$\frac{dT}{dt}=\sum_j \vec{F}_j\vec{v}_j+\sum_j \vec{F}'_j\vec{v}_j\,, \tag{3}$$

$$T-T_0=A+A'$$

$$A=\sum_j A_j,\quad A_j=\int\limits_{\overset{\frown}{M_{j,0}M_j}}\vec{F}_j d\,\vec{r}_j=\int\limits_{\overset{\frown}{M_{j,0}M_j}}\left(X_j dx_j+Y_j dy_j+Z_j dz_j\right), \tag{4}$$

$$A'=\sum_j A'_j,\quad A'_j=\int\limits_{\overset{\frown}{M_{j,0}M_j}}\vec{F}'_j d\,\vec{r}_j=\int\limits_{\overset{\frown}{M_{j,0}M_j}}\left(X'_j dx_j+Y'_j dy_j+Z'_j dz_j\right)$$

$$\begin{gathered}A_j=\int_{t_0}^{t}\vec{F}_j\,\vec{v}_j\,dt,\quad A_j=\int_{S_{j,0}}^{S_j}\vec{F}_j\vec{\tau}_j ds_j=\int_{S_{j,0}}^{S_j}F_j\cos\angle(\vec{F}_j,\vec{v}_j)\,ds_j\\ A'_j=\int_{t_0}^{t}\vec{F}'_j\vec{v}_j\,dt,\quad A'_j=\int_{S_{j,0}}^{S_j}\vec{F}'_j\,\vec{\tau}_j ds_j=\int_{S_{j,0}}^{S_j}F'_j\cos\angle(\vec{F}'_j,\vec{v}_j)\,ds_j\end{gathered}\,, \tag{5}$$

$$N=\frac{dA}{dt}+\frac{dA'}{dt}=\sum_j \vec{F}_j\vec{v}_j+\sum_j \vec{F}'_j\vec{v}_j \tag{6}$$

Обсудим эти равенства. Величина $\delta A$ (величина $\delta' A$) равна сумме элементарных работ главных векторов внешних (внутренних) сил, приложенных к точкам механической системы. Равенство (2) называют *теоремой об изменении кинетической энергии механической системы в дифференциальной форме*. Первое из равенств (4) называют *теоремой об изменении кинетической энергии механической системы в конечной (интегральной) форме*.

Величину $N$ называют *мощностью* и говорят, что мощность характеризует интенсивность выполнения работы $A+A'$ внутренними и внешними силами, действующими на точки механической системы. Используя понятие мощности и равенство (3) можно сказать, что *производная кинетической энергии механической системы равна мощности работы, выполняемой главными векторами внешних и внутренних сил, действующих на все точки этой системы*. Это еще одна формулировка теоремы об изменении кинетической энергии механической системы. Формулы (5) дают возможность вычислять работы через определенные интегралы по времени и естественным координатам (каждая точка $M_j$ имеет свою естественную координату $s_j$).

Теперь предположим, что существует вещественнозначная функция $V$ такая, что

$$\sum_j \vec{F}_j d\,\vec{r}_j+\sum_j \vec{F}'_j d\,\vec{r}_j=dV\,, \tag{7}$$

тогда из формулы (2) получаем: $T-V=h$ ,где $h$ - произвольная постоянная. Функцию $T-V$ называют *интегралом механической энергии*, а постоянную $h$ называют *постоянной механической энергии*. Величину $\Pi=-V$ называют *потенциальной энергией* механической системы.

Условие (7) выполнено, в частности, если все внешние силы $\vec{F}_j$ и внутренние силы $\vec{F}'_j$ потенциальны, то есть при любом $j$ существуют вещественнозначные функции $U_j, U'_j$ такие, что ис-тинны равенства $\vec{F}_j d\vec{r}_j = dU_j$ , $\vec{F}'_j d\vec{r}_j = dU'_j$ . В этом случае можно положить $V=U+U'$ при $U=\sum_j U_j$ , $U'=\sum_j U'_j$ .