Лекции к государственному экзамену по физике

Направление 511600 «Прикладная математика и физика»
(Бакалавриат, ПМ-ПУ СПбГУ)

Лектор: Л.К.Бабаджанянц

Вопрос 21 Проекции скорости и ускорения точки на оси ортогональной криволинейной и натуральной систем координат. Теоремы сложения. Скорость и ускорение точек твердого тела

Криволинейные координаты

Частные случаи криволинейных координат в пространстве R^n хорошо известны. Это полярные, цилиндрические, сферические координаты и т.д. На этих примерах можно заметить, что задать какие-то криволинейные координаты в некоторой области D пространства $R^n(y)$ означает поставить в соответствие каждой точке $y=(y_1,...,y_n)$ этой области упорядоченный набор вещественных чисел $x=(x_1,...,x_n)\in R_1^n$, называемых координатами этой точки. Декартовы координаты, в этом смысле, ничем не отличаются от других координат.

Определение *Регулярной (криволинейной) системой координат в области* D пространства $R^n(y)$ *называют систему гладких функций* $(x_1(y_1,...,y_n),...,x_n(y_1,...,y_n))$, *задающих взаимно-однозначное отображение области* D *на некоторую область* $D_1\subset R_1^n(x)$, *причем эти функции таковы, что*

$$J(y)=\det\begin{pmatrix}\partial x_1/\partial y_1 & ... & \partial x_n/\partial y_1\\ . & . & .\\ \partial x_1/\partial y_n & ... & \partial x_n/\partial y_n\end{pmatrix}\neq 0,\ \ x\in D$$

Если декартова система координат задана, то задание новой криволинейной системы координат удобно трактовать как замену и задавать формулами замены координат. В качестве примера рассмотрим цилиндрическую систему координат в R^3. Рассмотрим $R^3(y)$, $R_1^3(x)$ при $y=(y_1,y_2,y_3)$, $x=(x_1,x_2,x_3)$ и обозначим $\rho=y_1,\ \varphi=y_2,\ z=y_3$, $D=\{(\rho,\varphi,z)\in R^3 \,|\, \rho>0,\varphi\in[0,2\pi),z\in R\}$.

Формулы $x_1=\rho\cos\varphi,\ x_2=\rho\sin\varphi,\ x_3=z$ определяют гладкое отображение $f:D\to D_1\subset R_1^3(x)$ с якобианом:

$J(\rho,\varphi,z)=\det\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\rho$. Как видим, эти формулы задают регулярную криволинейную систему координат в области $D\subset R^3(\rho,\varphi,z)$, а значит и в области $D_1\subset R_1^3(x)$.

В механике фиксированную декартову систему координат в R^3 часто обозначают $Oxyz$, а упорядоченный набор координат точки рассматривают как радиус-вектор $\vec{r}=(x,y,z)$. Криволинейные координаты обозначим $\vec{q}=(q_1,q_2,q_3)$ и будем задавать их формулами $q_i=q_i(\vec{r})$, $\vec{r}=(x,y,z)\in D$, $i=1,2,3$, то есть $\vec{q}=\vec{q}(\vec{r})$, или $x=x(\vec{q})$, $y=y(\vec{q})$, $z=z(\vec{q})$, $\vec{r}=\vec{r}(\vec{q})$ при $\vec{q}=(q_1,q_2,q_3)\in Q=\left\{\vec{q}\,\middle|\,\vec{q}=\vec{q}(\vec{r}),\ \vec{r}\in D\right\}$, причем предполагается, что $\vec{q}(\vec{r}(\vec{q}))=\vec{q}$, $\vec{r}(\vec{q}(\vec{r}))=\vec{r}$ в областях Q и D соответственно.

Теперь мы введем в рассмотрение понятия *координатной поверхности, координатной линии, локального базиса* и *ортогональности* криволинейной системы координат. Это позволит нам в дальнейшем проектировать различные векторы (скорость, ускорение и т.п.) на оси криволинейной системы координат, то есть на оси упомянутого локального базиса. Наиболее простыми оказываются формулы проекций векторов на оси ортогональных криволинейных систем координат.

Пусть $\vec{q}_0=(q_{1,0},q_{2,0},q_{3,0})\in Q$, $\vec{r}_0=\vec{r}(\vec{q}_0)=(x_0,y_0,z_0)$. Тогда три множества $(q_{i,0})=\left\{(x,y,z)\in D\,\middle|\,q_i(x,y,z)=q_{i,0}\right\}$, $i=1,2,3$ называют *координатными поверхностями* криволинейной системы координат $\vec{q}=(q_1,q_2,q_3)$ в точке $(q_{1,0},q_{2,0},q_{3,0})$, а множества $\tilde{q}_3=(q_{1,0})\bigcap(q_{2,0})$, $\tilde{q}_2=(q_{1,0})\bigcap(q_{3,0})$, $\tilde{q}_1=(q_{2,0})\bigcap(q_{3,0})$ - ее *координатными линиями* в этой точке. Ясно, что $(q_{1,0})\bigcap(q_{2,0})\bigcap(q_{3,0})=\{(x_0,y_0,z_0)\}$.

В соответствии с определением регулярной системы координат, ее якобиан отличен от нуля в каждой точке области определения Q. Три вектора $\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_1}$, $\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_2}$, $\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_3}$ составляют строки матрицы этого якобиана и поэтому не могут быть нулевыми. Эти векторы являются касательными в точке $\vec{q}_0=(q_{1,0},q_{2,0},q_{3,0})\in Q$ к линиям $\tilde{q}_1$, $\tilde{q}_2$, $\tilde{q}_3$ соответственно. Действительно, координатная кривая $\tilde{q}_i$ в точке $(q_{1,0},q_{2,0},q_{3,0})$ параметризуется переменной q_i, то есть, например, для линии $\tilde{q}_1$

можно положить $\vec{r}=\vec{r}(q_1,q_{2,0},q_{3,0})$, и тогда производная $\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial q_1}$ дает направление касательной к этой кривой.

Совокупность трех векторов $(\vec{\tau}_1,\vec{\tau}_2,\vec{\tau}_3)$ единичной длины, определяемых формулой $\vec{\tau}_i=\left|\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\right|^{-1}\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}$, $i=1,2,3$ называют *локальным базисом* в точке $\vec{q}_0=(q_{1,0},q_{2,0},q_{3,0})$ рассматриваемой криволинейной системы координат. Если векторы $\vec{\tau}_1,\vec{\tau}_2,\vec{\tau}_3$ взаимно ортогональны в точке $\vec{q}_0=(q_{1,0},q_{2,0},q_{3,0})$ (в каждой точке области $\mathcal{Q}$), то базис и сама криволинейная система называются ортогональными в этой точке (в области $\mathcal{Q}$).

Условия ортогональности криволинейной системы координат

Мы определили ортогональность локального базиса условиями $\vec{\tau}_1\vec{\tau}_2=0,\ \vec{\tau}_1\vec{\tau}_3=0,\ \vec{\tau}_2\vec{\tau}_3=0$ ($\vec{\tau}_i\vec{\tau}_j$ - скалярное произведение $\vec{\tau}_i$ на $\vec{\tau}_j$). Так как ни один из векторов $\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial q_1},\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial q_2},\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial q_3}$ не может быть нулевым, эти условия эквивалентны следующим:

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_1}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_2}=0,\quad \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_1}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_3}=0,\quad \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_2}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_3}=0,$$ то есть,

$$\frac{\partial x}{\partial q_i}\frac{\partial x}{\partial q_j}+\frac{\partial y}{\partial q_i}\frac{\partial y}{\partial q_j}+\frac{\partial z}{\partial q_i}\frac{\partial z}{\partial q_j}=0,\quad i,j=1,2,3,\quad i\neq j$$

Коэффициенты Ляме. Проекции скорости точки на оси криволинейной системы координат

Так как

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_m}=\frac{\partial x}{\partial q_m}\vec{i}+\frac{\partial y}{\partial q_m}\vec{j}+\frac{\partial z}{\partial q_m}\vec{k}=H_m\vec{\tau}_m,\quad H_m=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_m}\right|=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_m}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_m}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_m}\right)^2}$$

то

$\vec{\tau}_m=(H_m)^{-1}\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial q_m}$. Величины H_m (иногда удобнее обозначение H_{q_m}) называют коэффициентами Ляме. Мы сейчас получим направляющие косинусы осей локального базиса криволинейной системы $\vec{q}=(q_1,q_2,q_3)$ относительно декартовой системы $\vec{r}=(x,y,z)$ и разложение скорости точки в этом базисе. Прежде отметим, что

$\cos\angle(\vec{\tau}_m,\vec{i}\,)=\vec{\tau}_m\vec{i}=(H_m)^{-1}\dfrac{\partial x}{\partial q_m},...,\ m=1,2,3$

Движением точки называют дважды непрерывно дифференцируемую вектор-функцию $\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ *аргумента* t *(времени) на промежутке* $J\subset R$.

Вектор-функции $\vec{v}=\dot{\vec{r}}=(\dot{x},\dot{y},\dot{z}),\ \vec{w}=\ddot{\vec{r}}=(\ddot{x},\ddot{y},\ddot{z})$ *называют соответственно скоростью и ускорением точки в этом движении,а кривую* $\left\{(x,y,z)\in R^3\,\middle|\,x=x(t),\ y=x(t),\ z=z(t),\ t\in J\right\}$ *- траекторией точки.*

Движением точки в криволинейных координатах $\vec{q}=(q_1,q_2,q_3)$ *называют дважды непрерывно дифференцируемую вектор-функцию* $\vec{q}(t)=(q_1(t),q_2(t),q_3(t))$ *аргумента* t *(времени) на промежутке* $J\subset R$.

Функции $\dot{q}_1,\dot{q}_2,\dot{q}_3$ *и* $\ddot{q}_1,\ddot{q}_2,\ddot{q}_3$ *называют соответственно обобщенными скоростями и ускорениями точки в этом движении, а кривую* $\left\{(q_1,q_2,q_3)\in R^3\,\middle|\,q_1=q_1(t),\ q_2=q_2(t),\ q_3=q_3(t),\ t\in J\right\}$ *- траекторией точки в криволинейных координатах.*

Теорема (проекции скорости точки на оси к.с.к.)

Пусть $\vec{q}(t)=(q_1(t),q_2(t),q_3(t))$ *- движение точки, а* v_{q_m} *- проекция вектора скорости* $\vec{v}=\dot{\vec{r}}$ *на* q_m *(то есть на ось* $\vec{\tau}_m$*). Тогда* $v_{q_m}=H_{q_m}\dot{q}_m,\ m=1,2,3$

<u>*Доказательство*</u> Так как $\vec{v}=\dot{\vec{r}}=\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial q_1}\dot{q}_1+\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial q_2}\dot{q}_2+\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial q_3}\dot{q}_3$, то $\vec{v}=H_1\dot{q}_1\vec{\tau}_1+H_2\dot{q}_2\vec{\tau}_2+H_3\dot{q}_3\vec{\tau}_3$, откуда и следует (5).

<u>*Следствие*</u> *Если криволинейная система ортогональна, то*

$v=\sqrt{\left(H_1\dot{q}_1\right)^2+\left(H_2\dot{q}_2\right)^2+\left(H_3\dot{q}_3\right)^2}$, $\cos\angle(\vec{v},\vec{\tau}_m)=H_m\dot{q}_m v^{-1},\ \ m=1,2,3$

<u>Пример</u> Рассмотрим цилиндрическую систему координат. Т.к. $\dfrac{\partial x}{\partial\rho}=\cos\varphi$, $\dfrac{\partial y}{\partial\rho}=\sin\varphi$, $\dfrac{\partial z}{\partial\rho}=0$, $\dfrac{\partial x}{\partial\varphi}=-\rho\sin\varphi$, $\dfrac{\partial y}{\partial\varphi}=\rho\cos\varphi$, $\dfrac{\partial z}{\partial\varphi}=0$, $\dfrac{\partial x}{\partial z}=0$, $\dfrac{\partial y}{\partial z}=0$, $\dfrac{\partial z}{\partial z}=1$, то легко проверить, что условия ортогональности выполнены. Так как $H_\rho=1,\ H_\varphi=\rho,\ H_z=1$, то $v_\rho=\dot{\rho},\ v_\varphi=\rho\dot{\varphi},\ v_z=\dot{z}$. Из ортогональности цилиндрической системы координат получаем:

$v=\sqrt{\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2}$, $\cos\angle(\vec{v},\vec{\tau}_\rho)=\dot{\rho}v^{-1},\ \ \cos\angle(\vec{v},\vec{\tau}_z)=\dot{z}v^{-1},\ \ \cos\angle(\vec{v},\vec{\tau}_\varphi)=\rho\dot{\varphi}v^{-1}$

Проекции ускорения точки на оси ортогональной

криволинейной системы координат

Формулу для скорости точки запишем в виде:

$$\vec{v}=\dot{\vec{r}}=\vec{v}(q_1,q_2,q_3,\dot{q}_1,\dot{q}_2,\dot{q}_3)=\vec{v}(\vec{q},\dot{\vec{q}})=\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_1}\dot{q}_1+\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_2}\dot{q}_2+\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_3}\dot{q}_3$$

Теорема (проекции ускорения точки на оси о.к.с.к.)

Пусть w_{q_m} *-проекция ускорения* $\vec{w}$ *на ось* q_m *, то есть на вектор* $\vec{\tau}_m$ *, и используется обозначение* $T=\frac{1}{2}\vec{v}\vec{v}=\frac{1}{2}v^2$.

Тогда, если криволинейная система координат (q_1,q_2,q_3) *ортогональна, то* $w_{q_m}=H_{q_m}^{-1}E_{q_m}(T)$, где $E_{q_m}(T)$ - *линейный дифференциальный оператор (оператор Эйлера-Лагранжа), определяемый равенством* $E_{q_m}(T)=\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial\dot{q}_m}-\dfrac{\partial T}{\partial q_m}$. <u>Доказательство</u> Так как $w_{q_m}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}\vec{\tau}_m,\ \vec{\tau}_m=H_{q_m}^{-1}\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial q_m}$, то $H_{q_m}w_{q_m}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial q_m}$, поэтому для доказательства теоремы мы должны показать, что истинно равенство $\dfrac{d\vec{v}}{dt}\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial q_m}=\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial\dot{q}_m}-\dfrac{\partial T}{\partial q_m}$. Так как $\dfrac{d}{dt}\left(\vec{v}\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial q_m}\right)=\dfrac{d\vec{v}}{dt}\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial q_m}+\vec{v}\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial q_m}$,то последнее равенство будет доказано если использовать формулы $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial q_m}=\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial q_m}$, $\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial q_m}=\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial\dot{q}_m}$. Остается доказать эти равенства. Второе из них следует непосредственно из формулы для скорости, а первое – из очевидных равенств:

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial q_k}=\sum_{m=1}^{3}\frac{\partial^2\vec{r}}{\partial q_m\partial q_k}\dot{q}_m,\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_k}=\sum_{m=1}^{3}\frac{\partial^2\vec{r}}{\partial q_k\partial q_m}\dot{q}_m.$$

Что и требовалось.

<u>Пример.</u> Рассмотрим цилиндрическую систему координат. Так как она ортогональна, то получаем, что $v=\sqrt{\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2}$,

$$T=\tfrac{1}{2}\left(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2\right),\ \frac{\partial T}{\partial\rho}=\rho\dot{\varphi}^2,\ \frac{\partial T}{\partial\dot{\rho}}=\dot{\rho},\ \frac{\partial T}{\partial\varphi}=0,\ \frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}=\rho^2\dot{\varphi},\ \frac{\partial T}{\partial z}=0,\ \frac{\partial T}{\partial\dot{z}}=\dot{z}$$

и тогда $w_\rho=\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2,\ w_\varphi=2\dot{\rho}\dot{\varphi}+\rho\ddot{\varphi},\ w_z=\ddot{z}$

Натуральный триэдр, проекции ускорения точки на оси натурального триэдра

Будем предполагать, что траектория движения точки задана параметрически вектор-функцией $\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ на некотором промежутке $J\subset R$ времени t .

Пусть $a,b \in J,\ a<b$, а $A=(x(a),y(a),z(a)),\ B=(x(b),y(b),z(b))$ - начало и конец участка траектории $\overset{\frown}{AB}$, соответствующего движению точки. Будем предполагать, что на этом участке (то есть при $t\in[a,b]$) функция $\vec{r}(t)$ непрерывно дифференцируема k раз (обычно предполагают, что $k=2$), причем выполнено условие $\dfrac{d\vec{r}}{dt}\neq 0,\ t\in[a,b]$. Как известно, при сделанных предположениях, в каждой точке $\vec{r}(t)$ участка $\overset{\frown}{AB}$ (который мы будем далее называть регулярным участком траектории) траектория имеет касательную, совпадающую по направлению с вектором скорости $\vec{v}=\dot{\vec{r}}(t)$. Пусть $a<t<t+\Delta t<b$ и используются обозначения:

$$M_1=(x(t),y(t),z(t)),\ M_2=(x(t+\Delta t),y(t+\Delta t),z(t+\Delta t))$$

$$\vec{v}_1=\dot{\vec{r}}(t),\ \vec{v}_2=\dot{\vec{r}}(t+\Delta t),\ \Delta\vec{v}=\vec{v}_2-\vec{v}_1$$

Плоскость $\Pi(M_1,\vec{v}_1,\Delta\vec{v})$, проходящая через точку M_1 и параллельная векторам $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2$, имеет предельное положение при $\Delta t\to 0$, то есть имеет предел при $\Delta v\to 0$ единичный вектор нормали, определяющий направление этой плоскости. Эту предельную плоскость называют *соприкасающейся*.

Теперь введем в рассмотрение ортогональный базис – тройку $(\vec{\tau},\vec{n},\vec{b})$ единичных взаимно-ортогональных векторов (ортов), исходящих из точки M_1, это $\vec{\tau}=\vec{v}/v$ - орт касательной, $\vec{n}$ - орт нормали, определяемый как единичный вектор, ортогональный вектору $\vec{\tau}$, лежащий в соприкасающейся плоскости и ориентированный в направлении вогнутости кривой в точке M_1, и, наконец, $\vec{b}=\vec{\tau}\times\vec{n}$ - орт бинормали.

Таким образом, с каждой парой $(t,\vec{r}(t))$ мы связали базис – его называют естественным базисом (а также естественной системой координат, натуральным базисом и т.п.).

Отметим, что одна и та же точка M траектории может соот-ветствовать нескольким моментам времени в том смысле, что $M=(x(t^1),y(t^1),z(t^1))=(x(t^2),y(t^2),z(t^2))=\ldots$

Натуральные системы, отвечающие парам $(t^i,\vec{r}(t^i)),\ i=1,2,\ldots$, мо-гут быть различными. Тем самым может оказаться, что точке M пространства, через которую проходит траектория, будет сопоставлено несколько различных базисов. В этой связи напомним, что при введении криволинейных координат мы сопоставляли каждой точке $\vec{r}=(x,y,z)$ некоторой области D пространства $R^n,\ n=1,2,3$ единственный базис.

Разложение скорости по осям естественной системы координат очевидно: $\vec{v}=v\vec{\tau}$. Теперь мы получим разложение по этим осям вектора ускорения $\vec{w}=\ddot{\vec{r}}$.

Так как $\vec{w}=\dot{\vec{v}}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}(\Delta\vec{v}/\Delta t)$, а вектор $\Delta\vec{v}$ лежит в плоскости $\Pi(M_1,\vec{v}_1,\Delta\vec{v})$, то $\vec{w}$ лежит в соприкасающейся плоскости. Так как $\vec{w}=\frac{d}{dt}(v\vec{\tau})=\frac{dv}{dt}\vec{\tau}+v\frac{d}{dt}\vec{\tau}$, а векторы $\vec{w}$ и $\vec{\tau}$ лежат в соприкасающейся плоскости, то и вектор $d\vec{\tau}/dt=v^{-1}(\vec{w}-(dv/dt)\vec{\tau})$ лежит в соприкасающейся плоскости. Так как $0=\frac{d}{dt}1=\frac{d}{dt}(\vec{\tau}\,\vec{\tau})=2\vec{\tau}\frac{d}{dt}\vec{\tau}$, то вектор $d\vec{\tau}/dt$ ортогонален вектору $\vec{\tau}$, а точнее направлен по $\vec{n}$. Итак, из формулы (2) получаем $\vec{w}=w_\tau\vec{\tau}+w_n\vec{n}+w_b\vec{b}$, где $w_\tau=\frac{dv}{dt}$, $w_n=v\left|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right|$, $w_b=0$. Величины $w_\tau\vec{\tau}, w_n\vec{n}$ называют *касательным и нормальным ускорениями* (*бинормальное* ускорение $w_b\vec{b}$ равно нулю). Величина w_n может быть выражена через радиус кривизны траектории. Для того, чтобы получить это полезное в приложениях выражение, мы введем последовательно понятия *естественной координаты*, *угла смежности*, *кривизны* и *радиуса кривизны*.

Пусть t_0 - фиксированный момент времени, а t - текущий момент, причем $a<t_0<t<b$. Одно из определений длины дуги $s=s(t)$ траектории от точки $\vec{r}(t_0)$ до точки $\vec{r}(t)$ следующее:

$$s(t)=\int_{t_0}^{t}\left|\dot{\vec{r}}(t)\right|dt=\int_{t_0}^{t}v(t)\,dt=\int_{t_0}^{t}\sqrt{(\dot{x}(t))^2+(\dot{y}(t))^2+(\dot{z}(t))^2}\,dt$$

Если $\Delta s=s(t+\Delta t)-s(t),\ \Delta\vec{r}=\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)$, то другое, эквивалентное, определение такое: $\Delta\vec{r}=(\Delta s)\vec{\tau}+\vec{o}(\Delta s),\ (\Delta t\to 0)$. Этими формулами мы будем пользоваться. *Естественной координатой* называют длину дуги $s(t)$, отсчитываемую в сторону движения от некоторой точки (выше мы назвали эту точку символом $\vec{r}(t_0)$). Из вышеприведенных формул для $s(t)$ и $\Delta\vec{r}$ соответственно получаем формулы:

$$w_\tau=\frac{dv}{dt}=\ddot{s},\quad \vec{\tau}=\frac{d\vec{r}}{ds}.$$

Углом смежности $\Delta\varphi<\pi$ называют угол между $\vec{\tau}(t)$ и $\vec{\tau}(t+\Delta t)$, отсчитываемый от первого вектора ко второму.

Можно показать, что на регулярном участке траектории существует предел $\lim\limits_{\Delta t\to 0}(\Delta\varphi/\Delta t)=d\varphi/dt$, а тогда существует и величина $K=\dfrac{d\varphi}{ds}=\dfrac{d\varphi}{dt}\dfrac{dt}{ds}=v^{-1}\dfrac{d\varphi}{dt}$, называемая *кривизной траектории* в точке $\vec{r}(t)$. Величину $\rho=K^{-1}$ называют *радиусом кривизны* траектории в этой точке.

Лемма $\dfrac{d\vec{\tau}}{dt}=\dfrac{d\varphi}{dt}\vec{n}$

<u>*Доказательство*</u> Если $\Delta\vec{\tau}=\vec{\tau}(t+\Delta t)-\vec{\tau}(t)$, $\vec{m}=\Delta\vec{\tau}/|\Delta\vec{\tau}|$, то $|\Delta\vec{\tau}|=2\sin\dfrac{\Delta\varphi}{2}$, $\Delta\vec{\tau}=2(\sin\dfrac{\Delta\varphi}{2})\vec{m}$, $\dfrac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta t}=\dfrac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta\varphi}\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}=\dfrac{\sin(\Delta\varphi/2)}{(\Delta\varphi/2)}\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}\vec{m}$ и, так как, при $\Delta t\to 0$, $\Delta\varphi\to 0,\ \sin\dfrac{\Delta\varphi}{2}\to 0,\ \vec{m}\to\vec{n}$, то для $\dfrac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta t}$, при $\Delta t\to 0$, получаем доказываемое равенство.

Теорема $w_n=v^2/\rho$

<u>*Доказательство*</u> $w_n=v\left|\dfrac{d\vec{\tau}}{dt}\right|=v\dfrac{d\varphi}{dt}=\dfrac{v^2}{\rho}$. Что и требовалось.

Скорость точек твердого тела

Пусть $(O',\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ - репер, жестко связанный с твердым телом (подвижный репер), а $(O,\vec{e}_\xi,\vec{e}_\eta,\vec{e}_\zeta)$ - неподвижный репер. Тогда, если (ξ_0,η_0,ζ_0) - координаты точки O' в неподвижном репере, то связь между координатами произвольной точки M тела в неподвижном и подвижном реперах следующая:

$$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\xi_0\\ \eta_0\\ \zeta_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}p_{1,1}\,p_{2,1}\,p_{3,1}\\ p_{1,2}\,p_{2,2}\,p_{3,2}\\ p_{1,3}\,p_{2,3}\,p_{3,3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

Как видим, перемещение $\Delta\vec{r}$ точки M складывается из перемещения $\Delta\vec{r}_{O'}$ точки O' и вращательного перемещения $\Delta(\vec{r}-\vec{r}_{O'})$ точки M при повороте тела вокруг O', т. е. $\Delta\vec{r}=\Delta\vec{r}_{O'}+\Delta(\vec{r}-\vec{r}_{O'})$, где $\Delta\vec{r}_{O'}=\vec{v}_{O'}\Delta t+\vec{o}(\Delta t)$, $\Delta t\to 0$ и $\Delta(\vec{r}-\vec{r}_{O'})=\overrightarrow{\Delta\varphi_{O'}}\times(\vec{r}-\vec{r}_{O'})$, $\Delta t\to 0$. Разделив это равенство на Δt и переходя при $\Delta t\to 0$ к пределу, получаем $\vec{v}=\vec{v}_{O'}+\vec{\omega}_{O'}\times(\vec{r}-\vec{r}_{O'})$. В этой формуле $\vec{\omega}_{O'}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}(\overrightarrow{\Delta\varphi_{O'}}/\Delta t)$ - мгновенная угловая скорость вращения тела вокруг точки O', а $\vec{v}$ и $\vec{v}_{O'}$ - скорости точек M и O'

Теорема *Вектор $\vec{\omega}_{O'}$ не зависит от выбора полюса O'*

<u>*Доказательство*</u>

Пусть B - другой полюс, тогда истинны две формулы: $\vec{v} = \vec{v}_B + \vec{\omega}_B \times (\vec{r} - \vec{r}_B)$, $\vec{v}_B = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega}_{O'} \times (\vec{r}_B - \vec{r}_{O'})$, откуда получаем: $\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega}_{O'} \times (\vec{r}_B - \vec{r}_{O'}) + \vec{\omega}_B \times (\vec{r} - \vec{r}_B)$

Вычитая из равенства $\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega}_{O'} \times (\vec{r} - \vec{r}_{O'})$ последнее равенство, получаем $\vec{\omega}_{O'} \times (\vec{r} - \vec{r}_{O'}) - \vec{\omega}_{O'} \times (\vec{r}_B - \vec{r}_{O'}) - \vec{\omega}_B \times (\vec{r} - \vec{r}_B) = \vec{0}$, то есть: $(\vec{\omega}_{O'} - \vec{\omega}_B) \times (\vec{r} - \vec{r}_B) = \vec{0}$. Так как это равенство истинно для любого $\vec{r}$, то $\vec{\omega}_{O'} = \vec{\omega}_B$. Что и требовалось.

Согласно этой теореме, вектор $\vec{\omega}_{O'}$ можно обозначить просто $\vec{\omega}$,- это *угловая скорость твердого тела*. Формула распределения скоростей в твердом теле запишется в следующем виде: $\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_{O'})$,- это *формула Эйлера*.

Ускорение точек твердого тела

Дифференцируя формулу Эйлера, получаем: $\vec{w} = \vec{w}_{O'} + \vec{\varepsilon} \times (\vec{r} - \vec{r}_{O'}) + \vec{\omega} \times (\vec{v} - \vec{v}_{O'})$

где $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$ - угловое ускорение твердого тела, $\vec{r}_{O'}$ - радиус-вектор точки O', принятой за полюс, $\vec{v}_{O'}, \vec{w}_{O'}$ - скорость и ускорение полюса. Векторное удаление $\vec{r} - \vec{r}_{O'}$ произвольной точки M тела от полюса можно представить в виде $\vec{r} - \vec{r}_{O'} = \vec{h} + \vec{\rho}$, где $\vec{h} = h\vec{e}_\omega,\ h = (\vec{r} - \vec{r}_{O'})\vec{e}_\omega,\ \vec{e}_\omega = \vec{\omega}\omega^{-1}$, а $\vec{\rho}$ - векторное удаление мгновенной оси вращения до точки M. По формуле Эйлера получаем, что $\vec{v} - \vec{v}_{O'} = \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_{O'}) = \vec{\omega} \times \vec{\rho}$. Так как $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) = -\omega^2 \vec{\rho}$, то из формулы (11) получаем: $\vec{w} = \vec{w}_{O'} + \vec{\varepsilon} \times (\vec{r} - \vec{r}_{O'}) + (-\omega^2 \vec{\rho})$

Первое слагаемое справа – это ускорение полюса, второе слагаемое называют вращательным ускорением, а третье – осестремительным ускорением.

Сложное движение точки

Пусть $(O, \vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta)$, $(O', \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ - неподвижный и подвижный реперы. Эти реперы и связанные с ними подвижное и неподвижное пространства называют также *абсолютным* и *относительным* соответственно. Далее мы будем изучать движение некоторой геометрической точки M относительно неподвижного (абсолютного) и подвижного (относительного) реперов.

Мы найдем связь между движением точки M в неподвижном и подвижном пространстве (то есть, относительно подвижного и неподвижного реперов) в предположении, что известно движение подвижного репера относительно неподвижного. Для этого, прежде всего, введем ряд определений.

Движение, скорость и ускорение точки M относительно неподвижного (абсолютного) репера называют *абсолютными*, а дви-жение, скорость и ускорение этой точки относительно подвижного (относительного) репера называют *относительными*. В момент t точка M совпадает с точкой M' подвижного пространства (рассматриваемого как твердое тело). Движение, скорость и ускорение этой точки M' в момент t относительно неподвижного (абсолютного) репера называют *переносными* для точки M в этот момент.

В связи с этими понятиями будем использовать следующие обозначения: $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ - абсолютные радиус-вектор, скорость и ускорение точки, $\vec{\rho} = \overrightarrow{O'M}$, $\vec{v}_r$, $\vec{w}_r$ - относительные радиус-век-тор, скорость и ускорение точки, $\vec{v}_e$, $\vec{w}_e$ - переносные скорость и ускорение точки. Кроме того, символом $\vec{\omega}$ будем обозначать угловую скорость подвижного (относительного) репера относительно неподвижного (абсолютного) репера.

Относительная производная

Пусть $\vec{C}$ -вектор-функция аргумента t и $\vec{C} = C_x\vec{i} + C_y\vec{j} + C_z\vec{k}$, тогда получаем: $\dot{\vec{C}} = \dot{C}_x\vec{i} + \dot{C}_y\vec{j} + \dot{C}_z\vec{k} + C_x\dot{\vec{i}} + C_y\dot{\vec{j}} + C_z\dot{\vec{k}}$. Производные $\dot{\vec{i}}, \dot{\vec{j}}, \dot{\vec{k}}$ зависят от пространства, в котором они рассматриваются. В частности, в подвижном пространстве они равны нулю.

Теорема (Формулы Пуассона)

Пусть подвижный репер $(O', \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, *жестко связанный с твердым телом, движется относительно неподвижного репера* $(O, \vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta)$ *с угловой скоростью* $\vec{\omega}$. *Тогда производные подвижных ортов в неподвижном репере вычисляются по формулам:* $\dot{\vec{i}} = \vec{\omega} \times \vec{i}$, $\dot{\vec{j}} = \vec{\omega} \times \vec{j}$, $\dot{\vec{k}} = \vec{\omega} \times \vec{k}$

<u>Доказательство</u> Мы докажем первую из формул, остальные доказываются аналогично. Введем обозначения:

$\vec{r}_{O'} = \overrightarrow{OO'}$, $\vec{v}_{O'} = \dot{\vec{r}}_{O'}$ $\quad \vec{r}_{O_i} = \overline{O, O' + \vec{i}}$, $\vec{v}_{O_i} = \dot{\vec{r}}_{O_i}$. Так как $\vec{r}_{O_i} = \vec{r}_{O'} + \vec{i}$, то $\vec{v}_{O_i} = \vec{v}_{O'} + d\vec{i}/dt$. Сопоставляя эту формулу с формулой Эйлера

$\vec{v}_{O_i} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times (\vec{r}_{O_i} - \vec{r}_{O'}) = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{i}$, получаем первую из формул (3).

Производную вектор-функции $\vec{C}$ в подвижном репере $(O', \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ обозначим $d'\vec{C}/dt$, ее называют *относительной производной вектор-функции* $\vec{C}$. Производную вектор-функции $\vec{C}$ в неподвижном репере $(O,\vec{e}_\xi,\vec{e}_\eta,\vec{e}_\zeta)$ обозначим $d\vec{C}/dt$, ее называют *абсолютной производной вектор-функции* $\vec{C}$.

Теорема (Формула относительной производной)

Пусть выполнены условия предыдущей теоремы. Тогда относительная и абсолютная производные вектор-функции $\vec{C}$ *связаны формулой:* $d\vec{C}/dt = d'\vec{C}/dt + \vec{\omega}\times\vec{C}$

Доказательство Так как $d\vec{C}/dt = d'\vec{C}/dt + C_x d\vec{i}/dt + C_y d\vec{j}/dt + C_z d\vec{k}/dt$, то, учитывая формулы Пуассона, получаем:

$d\vec{C}/dt = d'\vec{C}/dt + \vec{\omega}\times(C_x\vec{i} + C_y\vec{j} + C_z\vec{k}) = d'\vec{C}/dt + \vec{\omega}\times\vec{C}$, что и требовалось.

Теоремы сложения скоростей

Здесь мы воспользуемся обозначениями $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{\rho} = \overrightarrow{O'M}$, $\vec{v}_r$, $\vec{w}_r$, $\vec{v}_e$, $\vec{w}_e$, $\vec{\omega}$

Теорема (Формула сложения скоростей)

Абсолютная, переносная и относительная скорости движения точки связаны следующим равенством: $\vec{v} = \vec{v}_e + \vec{v}_r$

Доказательство Так как $\vec{r} = \vec{r}_{O'} + \vec{\rho}$, то, применяя предыдущую теорему, получаем: $\vec{v} = d\vec{r}/dt = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega}\times\vec{\rho} + d'\vec{\rho}/dt$.

По формуле Эйлера сумма первых двух слагаемых справа в этом равенстве равна $\vec{v}_e$ (то есть скорости той точки M' подвижного пространства, с которой в данный момент t совпадает движущаяся точка M). Теперь из того, что $d'\vec{\rho}/dt = \vec{v}_r$ следует равенство (1). Что и требовалось.

Теорема сложения ускорений

Здесь мы тоже используем обозначения $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{\rho} = \overrightarrow{O'M}$, $\vec{v}_r$, $\vec{w}_r$, $\vec{v}_e$, $\vec{w}_e$, $\vec{\omega}$. Кроме того, мы используем обозначение $\vec{w}_c = 2\vec{\omega}\times\vec{v}_r$,- эту векторную величину называют *ускорением Кориолиса* или *вращательным ускорением* точки в ее сложном движении.

Теорема (Формула Кориолиса сложения ускорений)

Абсолютное, переносное, относительное и вращательное ускорения в сложном движении точки связаны следующим Равенством: $\vec{w} = \vec{w}_e + \vec{w}_r + \vec{w}_c$

Доказательство

Дифференцируя равенство сложения скоростей, получаем: $\vec{w} = d\vec{v}/dt = d\vec{v}_e/dt + d\vec{v}_r/dt$. Из теоремы об относительной производной следует, что $d\vec{v}_r/dt = d'\vec{v}_r/dt + \vec{\omega}\times\vec{v}_r = \vec{w}_r + \vec{\omega}\times\vec{v}_r$.

Пусть $\vec{\varepsilon} = d\vec{\omega}/dt$ (угловое ускорение подвижного репера). Так как $\vec{v}_e = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_{O'})$, то используя еще раз формулу $\vec{v} = \vec{v}_e + \vec{v}_r$ приходим к равенствам:

$$d\vec{v}_e / dt = \vec{w}_{O'} + \vec{\varepsilon} \times (\vec{r} - \vec{r}_{O'}) + \vec{\omega} \times (\vec{v} - \vec{v}_{O'}) = \vec{w}_{O'} + \vec{\varepsilon} \times (\vec{r} - \vec{r}_{O'}) + \vec{\omega} \times (\vec{v}_e - \vec{v}_{O'}) + \vec{\omega} \times \vec{v}_r$$

Так как сумма первых трех слагаемых справа равна $\vec{w}_e$, то $d\vec{v}_e / dt = \vec{w}_e + \vec{\omega} \times \vec{v}_r$. Что и требовалось.