О.Н.Чижова

13 Зависимость решения системы дифференциальных уравнений от параметров и начальных данных.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в нормальной форме, содержащую р параметров

$$\dot{X} = F(t, X, \lambda), \text{ где } \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p). \tag{1}$$

Зададим начальные условия:

$$X(t_0) = X_0 \tag{2}$$

Теорема 13.1 *Пусть правые части системы (1) определены и непрерывны по t и по компонентам векторов X и λ на множестве*

$$\bar{\mathbb{R}} = \{(t, X, \lambda) |\, |t - t_0| \leq a; \quad \|X - X_0\| \leq b; \quad \underline{\lambda}_k \leq \lambda_k \leq \bar{\lambda}_k\} \quad k = \overline{1, p}$$

Пусть кроме того для любых двух точек $(t, \bar{X}, \lambda)$ и $(t, \bar{\bar{X}}, \lambda)$ множества $\bar{\mathbb{R}}$ выполнено условие Липшица по аргументу X

$$\| F(t, \bar{X}, \lambda) - F(t, \bar{\bar{X}}, \lambda) \| \leq L \| \bar{X} - \bar{\bar{X}} \|,$$

причём величина L одна и та же для всех рассматриваемых значений λ.

Тогда решение задачи Коши (1)-(2) существует, единственно и непрерывно дифференцируемо по t при $t \in [t_0 - \bar{h}; t_0 + \bar{h}]$, а также непрерывно по λ равномерно относительно t. (Здесь $\bar{h} = \min\{a; \frac{b}{\bar{M}}\}$; $\bar{M} = \max_{\bar{R}} \| F \|$).

Схема доказательства. Проведем только доказательство равномерной непрерывности решения задачи Коши (1)-(2) по λ.

Для этого построим последовательные приближения Пикара

$$\begin{cases} X_0(t, \lambda) \equiv X_0 \\ X_m(t, \lambda) = X_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, X_{m-1}(s, \lambda), \lambda)\, ds \end{cases} \tag{3}$$

Используя непрерывность функции F по всем аргументам на замкнутом множестве $\bar{\mathbb{R}}$, методом индукции по m установим, что все функции $X_m(t, \lambda)$ непрерывны относительно λ при $|t - t_0| \leq \bar{h}$ и не выходят при этом из множества $\bar{\mathbb{R}}$.

Далее, покажем что последовательность $\{X_m(t, \lambda)\}_{m=0}^{\infty}$ на промежутке Пикара сходится равномерно относительно λ к предельной функции $\bar{X}(t, \lambda)$. Для этого рассмотрим ряд

$$X_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (X_m(t,\lambda) - X_{m-1}(t,\lambda)) \tag{4}$$

и проведем оценку слагаемых этого ряда, как и при доказательстве теоремы Пикара. Поскольку величины $\bar{M}, L, \bar{h}$ не зависят от вектора λ, то оценочный мажорантный ряд будет иметь тот же вид, что и в теореме Пикара. Тогда будет выполнено соотношение

$$X_m(t,\lambda) \overset{\lambda}{\rightrightarrows} \bar{X}(t,\lambda),$$

откуда следует непрерывность предельной функции $\bar{X}(t,\lambda)$ относительно вектора λ. Полученные оценки не зависят также и от t, что означает равномерную относительно t непрерывность функции $\bar{X}(t,\lambda)$ по λ.

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь систему

$$\dot{X} = F(t,X) \tag{5}$$

и пусть теорема Пикара выполнена на множестве

$$\mathbb{R} = \{(t,X) \mid |t - t_0| \le a; \qquad \| X - X_0 \| \le b\}$$

Рассмотрим начальные условия вида

$$X(t^*) = X^*, \tag{6}$$

где (t^*, X^*) - внутренняя точка множества $\mathbb{R}$.

Теорема 13.2 *Решение задачи Коши (5)-(6) $X = X(t, t^*, X^*)$ на некотором подмножестве множества $\mathbb{R}$ непрерывно по начальным данным t^*, X^* равномерно относительно t.*

Схема доказательства. Сделаем в системе (5) замену переменных

$$t - t^* = \xi \quad X - X^* = Z \tag{7}$$

В новых переменных система (5) примет вид:

$$\frac{dZ}{d\xi} = F(\xi + t^*;\ Z + X^*) = F_1(\xi; Z; t^*; X^*) \tag{8}$$

Начальные условия (6) примут вид

$$Z(0) = 0 \tag{9}$$

Множество $\mathbb{R}$ примет вид

$$\mathbb{R}^* = \{\ |\xi + t^* - t_0| \le a;\ \| Z + X^* - X_0 \| \le b\}$$

Неравенства, определяющие множество $\mathbb{R}^*$ будут выполнены, если, например, считать что

$$\begin{array}{ll} |\xi| \leq a/2; & |t^* - t_0| \leq a/2 \\ \| Z \| \leq b/2; & \| X^* - X_0 \| \leq b/2. \end{array}$$

Тогда система (8), где величины $t^*; X^*$ являются параметрами, удовлетворяет теореме 1 на множестве $\mathbb{R}^*$, поскольку линейное преобразование (7) не изменяет необходимых свойств правой части. Тогда решение задачи Коши (8)-(9) непрерывно по параметрам $t^*; X^*$ равномерно относительно ξ при $|\xi| \leq h/2$.

Для завершения доказательства вернемся к исходным переменным

$$X(t; t^*; X^*) = Z(t - t^*; t^*; X^*) + X^* \tag{10}$$

При этом из неравенства $|\xi| \leq h/2$ вытекает

$$|t - t^*| = |t - t_0 + t_0 - t^*| \leq |t - t_0| + |t_0 - t^*| \leq h/2$$

Решение (10) будет тогда определено при $|t - t_0| \leq h/4$ и непрерывно по t^*, X^*, если $|t_0 - t_*| \leq h/4; \qquad \| X_0 - X^* \| \leq b/2$.

Теорема доказана.