**А.Ю.Утешев**

# 9. Матричное представление линейных операторов. Диагонализуемость матрицы линейного оператора.

## 1. Матричное представление линейных операторов

Будем обозначать через $\mathbb{V}$ линейное векторное пространство (вещественное или комплексное) размерности $n$: $\dim \mathbb{V} = n$; его элементы — прописными буквами: $X, Y, \dots, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \dots$, а скаляры — строчными: $x, y, \dots, \alpha, \beta, \dots$

Определение. Функция $\mathscr{A}$, отображающая $\mathbb{V}$ в себя: $\mathscr{A} : \mathbb{V} \longmapsto \mathbb{V}$, называется **линейным преобразованием** $\mathbb{V}$ или **оператором** на $\mathbb{V}$ если она обладает свойством линейности:

$$\mathscr{A}(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) = \alpha_1 \mathscr{A}(X_1) + \alpha_2 \mathscr{A}(X_2) \text{ для } \left\{ \begin{array}{lcl} \forall \, \{X_1, X_2\} & \subset & \mathbb{V} \\ \forall \, \{\alpha_1, \alpha_2\} & \subset & \mathbb{R} \text{ или } \mathbb{C} \end{array} \right. \tag{1}$$

(здесь $\alpha_1, \alpha_2$ — константы из $\mathbb{R}$ если оба пространства вещественны, и из $\mathbb{C}$, если хотя бы одно из пространств комплексное).

Рассмотрим оператор $\mathscr{A}$ на $\mathbb{V}$ и пусть $\{X_1, \dots, X_n\}$ — базис $\mathbb{V}$. Найдем координаты векторов $\mathscr{A}(X_1), \dots, \mathscr{A}(X_n)$ в базисе $\{X_1, \dots, X_n\}$ :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathscr{A}(X_1) & = & \alpha_{11} X_1 + \alpha_{21} X_2 + \ldots + \alpha_{n1} X_n, \\ \mathscr{A}(X_2) & = & \alpha_{12} X_1 + \alpha_{22} X_2 + \ldots + \alpha_{n2} X_n, \\ \dots & & \dots, \\ \mathscr{A}(X_n) & = & \alpha_{1n} X_1 + \alpha_{2n} X_2 + \ldots + \alpha_{nn} X_n. \end{array} \right. \tag{2}$$

Определение. Матрица

$$\mathbf{A} = \left( \begin{array}{cccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & & & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{array} \right)_{n \times n} ,$$

в которой по столбцам стоят координаты образов базисных векторов, называется **матрицей оператора** $\mathscr{A}$ в выбранном базисе.

**Пример 1.** *В линейном пространстве* $\mathbb{P}_3$ *полиномов степеней не выше* 3 *рассмотрим дифференциальный оператор*

$$\mathscr{A} \stackrel{\text{def}}{=} 2\frac{d\Box}{d\,x} - 1 \times \Box \ : \ p(x) \longmapsto 2\,p'(x) - p(x) \ .$$

*Найти его матрицу в базисе* $\{1, x, x^2, x^3\}$.

Решение. В этом примере $X_1 = 1, X_2 = x, X_3 = x^2, X_4 = x^3$. Формулы (2) приобретают вид:

$$\left\{ \begin{array}{llll} \mathscr{A}(X_1) = & 2X_1' - X_1 = & -1 & = -1 \cdot X_1, \\ \mathscr{A}(X_2) = & 2X_2' - X_2 = & 2 - x & = 2 \cdot X_1 - 1 \cdot X_2, \\ \mathscr{A}(X_3) = & 2X_3' - X_3 = & 4\,x - x^2 & = 4 \cdot X_2 - 1 \cdot X_3, \\ \mathscr{A}(X_4) = & 2X_4' - X_4 = & 6\,x^2 - x^3 & = 6 \cdot X_3 - 1 \cdot X_4. \end{array} \right.$$

Выбираем коэффициенты из правых частей получившихся формул и формируем из них <u>столбцы</u> матрицы оператора:

$$\mathbf{A} = \left( \begin{array}{rrrr} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

$\triangle$

**Пример 2.** *Известны образы базисных векторов* $\mathbb{R}^3$ *под действием оператора* $\mathscr{A}$*:*

$$\mathscr{A} \left( \begin{array}{r} 5 \\ 3 \\ 1 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{r} -2 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right), \ \mathscr{A} \left( \begin{array}{r} 1 \\ -3 \\ -2 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{r} -1 \\ 3 \\ 0 \end{array} \right), \ \mathscr{A} \left( \begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ 1 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{r} -2 \\ -3 \\ 0 \end{array} \right) \ .$$

*Найти матрицу этого оператора в исходном базисе.*

Решение. Компоненты матрицы $\mathbf{A}$ ищутся по формулам (2), которые можно записать в матричном виде:

$$[X_1, \dots, X_n]\, \mathbf{A} = [\mathscr{A}(X_1), \dots, \mathscr{A}(X_n)] \ .$$

Откуда

$$\mathbf{A} = [X_1, \dots, X_n]^{-1}\, [\mathscr{A}(X_1), \dots, \mathscr{A}(X_n)] \ ,$$

и для нашего примера эта формула дает

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \ &= \ \left( \begin{array}{rrr} 5 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{array} \right)^{-1} \left( \begin{array}{rrr} -2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = \\ &= \left( \begin{array}{rrr} 1 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & -7 \\ -3 & 11 & -18 \end{array} \right) \left( \begin{array}{rrr} -2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{rrr} -5 & -10 & 7 \\ 6 & 13 & -10 \\ 17 & 36 & -27 \end{array} \right). \end{aligned}$$

$\triangle$

**Теорема 1.** *Координаты произвольного вектора $X = x_1X_1 + \ldots + x_nX_n$ и его образа $Y = \mathscr{A}(X) = y_1X_1 + \ldots + y_nX_n$ связаны формулой*

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \ . \tag{3}$$

**Доказательство** . С одной стороны, $Y = \mathscr{A}(X) = y_1X_1 + \ldots + y_nX_n$. С другой стороны, с помощью формул (2) получаем:

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{A}(X) & = & \mathscr{A}(x_1X_1 + \ldots + x_nX_n) = x_1\mathscr{A}(X_1) + \ldots + x_n\mathscr{A}(X_n) = \\ & = & x_1(\alpha_{11}X_1 + \ldots + \alpha_{n1}X_n) + \ldots + x_n(\alpha_{1n}X_1 + \ldots + \alpha_{nn}X_n) = \\ & = & (x_1\alpha_{11} + \ldots + x_n\alpha_{1n})X_1 + \ldots + (x_1\alpha_{n1} + \ldots + x_n\alpha_{nn})X_n. \end{array}$$

Поскольку координаты вектора в фиксированном базисе определяются единственным образом, имеем:

$$\begin{array}{rcl} y_1 & = & x_1\alpha_{11} + \ldots + x_n\alpha_{1n}, \\ \ldots & & \ldots \\ y_n & = & x_1\alpha_{n1} + \ldots + x_n\alpha_{nn}, \end{array}$$

что и соответствует матричной форме записи (3). □

Теорема 1 позволяет свести исследование оператора, действущего в произвольном пространстве $\mathbb{V}$, к исследованию оператора, действующего над векторами-столбцами в $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$. Последний всегда можно задать в виде $\mathscr{A}(X) = \mathbf{A}X$, т.е. действие $\mathscr{A}$ на столбец $X$ эквивалентно домножению этого столбца слева на подходящую квадратную матрицу порядка $n$. Осталось только выяснить как изменяется матрица оператора при переходе от одного базиса к другому и подобрать затем такой базис, в котором матрица приобрела бы наиболее простую структуру.

**Теорема 2.** *Если $C$ — матрица перехода от старого базиса к новому, то матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ оператора в старом и новом базисах связаны формулой:*

$$\mathbf{B} = C^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot C \ . \tag{4}$$

**Доказательство** . Пусть $\{X_1, \ldots, X_n\}$ — старый базис, $\{\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_n\}$ — новый базис и нам известны координаты векторов $X$ и $\mathscr{A}(X)$ в обоих базисах:

$$X = x_1X_1 + \ldots + x_nX_n = \mathfrak{x}_1\mathfrak{X}_1 + \ldots + \mathfrak{x}_n\mathfrak{X}_n,$$

$$Y = \mathscr{A}(X) = y_1X_1 + \ldots + y_nX_n = \mathfrak{y}_1\mathfrak{X}_1 + \ldots + \mathfrak{y}_n\mathfrak{X}_n.$$

Матрица перехода $C$ связывает координаты векторов в старом и новом базисах:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \mathfrak{x}_1 \\ \vdots \\ \mathfrak{x}_n \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \mathfrak{y}_1 \\ \vdots \\ \mathfrak{y}_n \end{pmatrix}.$$

Получаем цепочку равенств:

$$\mathbf{B} \begin{pmatrix} \mathfrak{x}_1 \\ \vdots \\ \mathfrak{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{y}_1 \\ \vdots \\ \mathfrak{y}_n \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = C^{-1}\mathbf{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C^{-1}\mathbf{A}C \begin{pmatrix} \mathfrak{x}_1 \\ \vdots \\ \mathfrak{x}_n \end{pmatrix}.$$

Равенство имеет место для любых столбцов $(\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_n)^\top$, следовательно и для столбцов

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Объединяя полученные $n$ равенств в одно матричное, получим $\mathbf{B} \cdot E = C^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot C \cdot E$, откуда и следует (4). □

Определение. Матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, связанные соотношением (4) (при какой-то неособенной матрице $C$) называются **подобными**: $\mathbf{A} \doteq \mathbf{B}$ .

## 2. Собственные числа и собственные векторы

Рассмотрим оператор над комплексным пространством $\mathbb{V}$.

Определение. Вектор $X \in \mathbb{V}$ называется **собственным вектором** оператора $\mathscr{A}$, если

$$\mathbf{a})X \neq \mathbb{O}, \quad \text{и} \quad \mathbf{b})\ \exists\ \lambda \in \mathbb{C} \text{ такое, что } \mathscr{A}(X) = \lambda X\ .$$

В этом случае число $\lambda$ называется **собственным** (или **характеристическим**) **числом** оператора, соответствующим данному собственному вектору; обратно, говорят, что вектор $X$ **принадлежит собственному числу** $\lambda$.

Геометрический смысл *вещественных* собственных чисел и векторов: собственный вектор задает направление, на котором действие оператора сводится к растяжению, тогда коэффициент растяжения и будет собственным числом.

**Теорема 3.** *В комплексном пространстве любой оператор имеет по крайней мере один собственный вектор.*

**Доказательство** . Пусть $\{X_1, \dots, X_n\}$ — произвольный базис $\mathbb{V}$ и $\mathbf{A}$ — матрица оператора $\mathscr{A}$ в этом базисе. Тогда для того чтобы вектор $X = x_1X_1 + \dots + x_nX_n \neq \mathbb{O}$ был собственным, принадлежащим собственному числу $\lambda$, **Н.** и **Д.** чтобы выполнялось равенство

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \iff \quad \begin{pmatrix} \alpha_{11}-\lambda & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\lambda & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & & & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbb{O}_{n\times 1} \tag{5}$$

Покажем, что существуют комплексные числа $\lambda$ и не все нулевые $x_1, \dots, x_n$, удовлетворяющие системе (5). Необходимым условием существования нетривиального решения у однородной системы (5) является равенство нулю ее определителя:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda E) = \begin{vmatrix} \alpha_{11}-\lambda & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\lambda & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & & & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \ . \tag{6}$$

Этот определитель является полиномом степени $n$ по $\lambda$. По основной теореме высшей алгебры этот полином имеет по крайней мере один комплексный корень $\lambda = \lambda_1$. Подставив его в (5), получаем однородную систему уравнений с нулевым определителем. У такой системы всегда существует нетривиальное решение $(x_1^*, \dots, x_n^*)^\top$, но тогда вектор $\mathfrak{X}_1 \stackrel{\text{def}}{=} x_1^*X_1 + \dots + x_n^*X_n$ будет собственным вектором оператора $\mathscr{A}$, принадлежащим $\lambda_1$. □

Определение. Уравнение (6) называется **характеристическим** или **вековым** уравнением, а полином в левой его части — **характеристическим** полиномом матрицы $\mathbf{A}$.

**Пример 3.** *Хар. полиномы матриц второго и третьего порядков*

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \ ;$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda^3 + (a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2 - \left\{ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \right\} \lambda + \det A \ .$$

*возникают в задаче о классификации линий и поверхностей второго порядка*[1].

[1] См. вопрос №11.

**Пример 4.** *Найти собственные числа и собственные векторы матрицы*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & 3/2 & -1/2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Решение. Вычисляем хар.полином и находим его корни:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda E) = \lambda^4 - 3\,\lambda^3 + \lambda^2 + 3\,\lambda - 2 = (\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-1)^2 \ .$$

Подставляем каждый из этих корней в систему (5), решаем ее по методу Гаусса и строим фундаментальную систему решений (**ф.с.р.**).

$$(\mathbf{A} + 1\cdot E)X = \mathbb{O} \quad \Longrightarrow \ \textbf{ф.с.р.} = \left\{ \mathfrak{X}_1 = (0, -1, 0, 1)^{\top} \right\} \ .$$

Любой вектор вида $\alpha\mathfrak{X}_1$ будет собственным, принадлежащим $\lambda = -1$.

$$(\mathbf{A} - 2\cdot E)X = \mathbb{O} \quad \Longrightarrow \ \textbf{ф.с.р.} = \left\{ \mathfrak{X}_2 = (-1, 0, 1, 0)^{\top} \right\} \ .$$

Любой вектор вида $\alpha\mathfrak{X}_2$ будет собственным, принадлежащим $\lambda = 2$.

$$(\mathbf{A} - 1\cdot E)X = \mathbb{O} \quad \Longrightarrow \ \textbf{ф.с.р.} = \left\{ \mathfrak{X}_3 = (0, 0, 1, 1)^{\top}, \mathfrak{X}_4 = (-1, 1, 0, 0)^{\top} \right\} \ .$$

Любой вектор вида $\alpha\mathfrak{X}_3 + \beta\mathfrak{X}_4$ будет собственным, принадлежащим $\lambda = 1$. $\triangle$

**Следствие 1.** *Любой корень хар.полинома является собственным числом оператора $\mathscr{A}$ и обратно: любое собственное число оператора $\mathscr{A}$ является корнем хар.полинома.*

**Теорема 4.** *Хар.полиномы подобных матриц одинаковы.*

**Доказательство .** $\mathbf{A} \doteq \mathbf{B} \iff \exists$ неособенная матрица $C$, такая что $\mathbf{B} = C^{-1}\mathbf{A}C$. Имеем:

$$\det(\mathbf{B} - \lambda E) = \det(C^{-1}\mathbf{A}C - \lambda E) =$$

$$= \det(C^{-1}\mathbf{A}C - \lambda C^{-1}EC) = \det C^{-1}(\mathbf{A} - \lambda E)C = \det(\mathbf{A} - \lambda E) \ .$$

$\square$

Иначе говоря, для данного оператора $\mathscr{A}$ хар.полином его матрицы не зависит от выбора базиса пространства. Поэтому можно говорить о хар.полиноме *оператора* $\mathscr{A}$.

## 3. Диагонализуемость матрицы оператора

**Теорема 5.** *Собственные векторы оператора, принадлежащие различным собственным числам, линейно независимы.*

**Доказательство** . Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — различные собственные числа оператора $\mathscr{A}$, а $\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_k$ — принадлежащие им собственные векторы: $\mathscr{A}(\mathfrak{X}_j) = \lambda_j \mathfrak{X}_j$. Докажем теорему индукцией по $k$. Для $k = 1$ утверждение очевидно. Пусть оно верно для $k-1$ вектора, но неверно для $k$ векторов:

$$\alpha_1 \mathfrak{X}_1 + \ldots + \alpha_{k-1} \mathfrak{X}_{k-1} + \alpha_k \mathfrak{X}_k = \mathbb{O} \tag{7}$$

при каком-то из коэффициентов отличном от нуля; пусть $\alpha_1 \neq 0$.

К обеим частям равенства (7) применим оператор $\mathscr{A}$. Получим

$$\mathscr{A}(\alpha_1 \mathfrak{X}_1 + \ldots + \alpha_{k-1} \mathfrak{X}_{k-1} + \alpha_k \mathfrak{X}_k) = \mathbb{O} \implies \alpha_1 \lambda_1 \mathfrak{X}_1 + \ldots + \alpha_{k-1} \lambda_{k-1} \mathfrak{X}_{k-1} + \alpha_k \lambda_k \mathfrak{X}_k = \mathbb{O}.$$

Домножим равенство (7) на $\lambda_k$ и вычтем из последнего:

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k)\mathfrak{X}_1 + \ldots + \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)\mathfrak{X}_{k-1} = \mathbb{O}.$$

Здесь $\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k) \neq 0$ т.к. $\lambda_1 \neq \lambda_k$. Векторы $\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_{k-1}$ получились линейно зависимыми, что противоречит индукционному предположению.
$\square$

**Теорема 6.** *Если оператор имеет $n = \dim \mathbb{V}$ линейно независимых собственных векторов, то в базисе ими образуемом матрица оператора диагональна. Обратно: если матрица оператора в некотором базисе диагональна, то каждый вектор этого базиса — собственный для оператора.*

**Доказательство** . Если

$$\mathscr{A}(\mathfrak{X}_1) = \lambda_1 \mathfrak{X}_1, \ldots, \mathscr{A}(\mathfrak{X}_n) = \lambda_n \mathfrak{X}_n \tag{8}$$

и система $\{\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_n\}$ **л.н.з**, то взяв ее в качестве базиса пространства $\mathbb{V}$ получим соответствующую матрицу оператора $\mathscr{A}$ в виде:

$$\mathbf{A}_{diag} = \left( \begin{array}{ccc} \lambda_1 & & \mathbb{O} \\ & \ddots & \\ \mathbb{O} & & \lambda_n \end{array} \right). \tag{9}$$

Обратно, если матрица оператора в некотором базисе $\{\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_n\}$ имеет вид (9), то это означает, например, что $\mathscr{A}(\mathfrak{X}_1) = \lambda_1 \mathfrak{X}_1$, т.е. $\mathfrak{X}_1$ — собственный вектор, принадлежащий $\lambda_1$. Аналогично доказывается и для оставшихся векторов. $\square$

Определение. Базис линейного пространства, состоящий из собственных векторов оператора $\mathscr{A}$, называется **каноническим**.

**Следствие 1 (Матричный аналог теоремы).** *Пусть* $\mathbf{A}$ *— матрица оператора* $\mathscr{A}$ *в заданном базисе. Неособенная матрица* $C$*, удовлетворяющая равенству*

$$C^{-1}\mathbf{A}C = \mathbf{A}_{diag}$$

*существует тогда и только тогда, когда существует базис пространства, состоящий из собственных векторов. Тогда матрица* $C$ *является матрицей перехода от заданного базиса к каноническому базису, а на диагонали* $\mathbf{A}_{diag}$ *стоят собственные числа матрицы* $\mathbf{A}$.

Определение. При выполнении условия предыдущего следствия говорят, что матрица **A диагонализуема** (или приводится к диагональной форме).

Теорема 5 позволяет сформулировать достаточное условие диагонализуемости.

**Теорема 7.** *Если хар.полином оператора не имеет кратных корней, то матрица оператора диагонализуема.*

Условие теоремы 7 проверяется чисто алгебраически: вычислением наибольшего общего делителя хар.полинома и его производной[2]. Подчеркнем еще раз: это условие не является необходимым для диагонализуемости, как показывает пример 4.

С другой стороны, имеются примеры матриц с кратными собственными числами, которые не являются диагонализуемыми. Так, для матриц

$$\mathbf{A} = \left( \begin{array}{rr} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{array} \right) \quad \text{и} \quad \mathbf{A} = \left( \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{array} \right)$$

попытка подобрать матрицу $C$, удовлетворяющую равенству

$$\mathbf{A}C = C \left( \begin{array}{cc} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{array} \right) \qquad \forall \alpha_1 \in \mathbb{C}, \alpha_2 \in \mathbb{C} \ ,$$

заканчивается необходимым условием: $\det C = 0$.

Для того, чтобы выяснить диагонализуема или нет данная конкретная матрица, имеющая кратные собственные числа, каждое из последних исследуется отдельно на количество линейно-независимых собственных векторов, ему принадлежащих. Число таких векторов не превосходит кратности собственного числа в хар.полиноме. Таким образом, матрица оператора диагонализуема тогда и только тогда, когда для каждого собственного числа $\lambda_j$ выполнено:

$$n - \operatorname{rank}(\mathbf{A} - \lambda_j E) = \text{кратность } \lambda_j \ . \qquad (10)$$

[2]Или же дискриминанта хар.полинома.

**Пример 5.** *Найти все вещественные значения параметра* $\alpha$, *при которых матрица*
$$\begin{pmatrix} 1 & 2\,\alpha & \alpha-2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$
*диагонализуема.*

Решение. Хар.полином $f(\lambda) = -\lambda^3 + 3\,\lambda - 2\,(3\,\alpha - 1)$ имеет кратные корни только для тех значений параметра $\alpha$, при которых одновременно $f(\lambda) = 0, f'(\lambda) = 0$, т.е. при $\alpha = 0$ и $\alpha = {}^2\!/\!_3$. При $\alpha = 0$ корень $\lambda = -1$ имеет кратность 2. Найдем ранг матрицы $\mathbf{A} + E$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \operatorname{rank} = 2, n - \operatorname{rank} = 1$$

Условие (10) не выполнено. Оно не будет выполнено и при $\alpha = {}^2\!/\!_3$ (здесь корень $\lambda = 1$ имеет кратность 2).

Ответ. Матрица диагонализуема при всех значениях параметра, за исключением $\alpha = 0$ и $\alpha = {}^2\!/\!_3$.

Существует целый класс диагонализуемых матриц.

**Теорема 8.** *Любая симметричная матрица диагонализуема. Если, вдобавок, эта матрица вещественна, то и ее диагональный вид тоже будет вещественным.*

Замечание. Для недиагонализуемых матриц ставится задача об их приведении к так называемой **жордановой нормальной форме**.