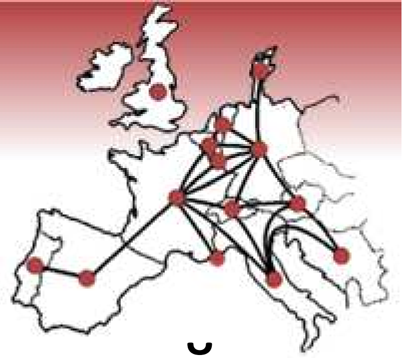
Введение в теорию графов

Лекция по материалам сайта «ГрафоMann»

Хитров Геннадий Михайлович
СПбГУ, ПМ-ПУ

Граф: определение



- **Графом** называется простейшая модель связанной системы, т. е. некоторая выделенная совокупность объектов, между каждой парой элементов которой установлено наличие или отсутствие связи.
- Если кроме факта связи устанавливается и её направление (ориентация связи), то граф называется *ориентированным*.

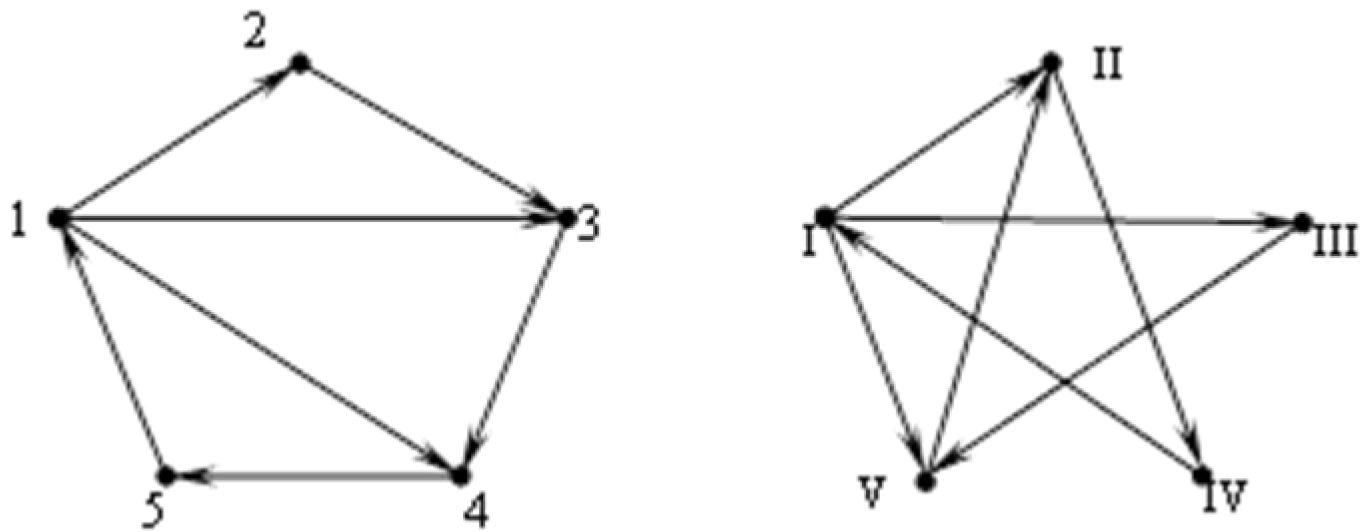
  - Неориентированный граф легко моделируется ориентированным: факт наличия связи между двумя различными элементами моделируется двумя ориентированными связями – связью «туда» и связью «обратно».

Теория графов

- **Теория графов** – наука, которая занимается изучением свойств графов и различными способами их математического моделирования (различными способами их интерпретации).

Теория графов

- **Теория графов** – наука, которая занимается изучением свойств графов и различными способами их математического моделирования (различными способами их интерпретации).



Определения

- Элементы связанной системы, составляющей граф, мы будем называть **вершинами**, а две различные вершины будем называть **смежными**, если между ними существует связь. Для того, чтобы как-то производить различие между вершинами графа, мы будем их нумеровать (помечать).
- Один и тот же граф с различным образом помеченными вершинами будем называть различными представителями графа, и рассматривать их как разные объекты. Очевидно, что различные представители графа **изоморфны**, т. е. между их вершинами существует взаимнооднозначное соответствие, сохраняющее смежность вершин.

Геометрическое

- Графом называется фигура, состоящая из точек, называемых *вершинами*, и отрезков, соединяющих некоторые из этих вершин. Соединяющие отрезки могут быть направленными (*дугами* – случай ориентированного графа), ненаправленными (*ребрами* – случай неориентированного графа), прямолинейными или криволинейными. Отрезок, соединяющий вершину с самой собой, называется *петлей*.

Теоретико-множественное 1

- *Ориентированным графом* называется пара *(V,R)*, где *V* – некоторое конечное множество, элементы которого называются *вершинами*, а $R \subseteq V \times V$, т. е. некоторое подмножество декартова произведения множества *V* на себя, или бинарное отношение на *V*. Элементы множества *R* , т. е. упорядоченные пары $(u, v) \in R$ (где $u, v \in V$) соответствуют *дугам* предыдущего определения. Обозначается граф обычно через *G(V,R)*.

Теоретико-множественное 2

- *Неориентированным графом* называется пара (*V*, *X*), где элементы множества *V* называются вершинами, а элементы множества *X* – некоторые двухэлементные подмножества множества *V*, называются ребрами. Обозначается обыкновенный граф обычно через *G*(*V*,*X*).
  - Множество *X* можно описать следующим образом $X \subseteq \Omega$: , где $\Omega = \left\{\{u, v\} \middle| \, u, v \in V\right\}$.

Матричное 1

- *Ориентированным графом называется множество (класс) квадратных (0,1)-матриц, перестановочно подобных между собой*.
  - Две квадратные матрицы называются перестановочно подобными (Р-подобными), если от одной к другой можно перейти с помощью перестановки рядов, т. е. с помощью перестановки строк и такой же перестановки столбцов.
- Матрицы, фигурирующие в этом определении, называются *матрицами смежности графа.*

Матричное 2

- *Обыкновенным неориентированным* графом называется множество (класс) (0,1)-матриц инцидентности *B*, перестановочно эквивалентных между собой.

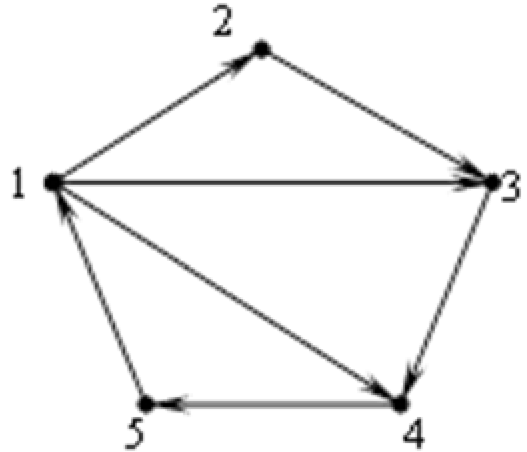
Матрица B размерности $n \times m$ с элементами b_{ij} называется матрицей инцидентности для графа G с множеством вершин $V = \{v_1, v_2, \ldots v_n\}$ и множеством ребер $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, если $b_{ij} = 1$, когда вершина v_i инцидентна ребру x_j и $b_{ij} = 0$ в противном случае.

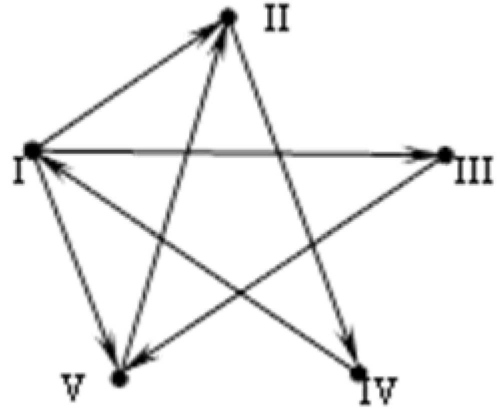
Матричное 3

- *Обыкновенным ориентированным графом* называется множество (класс) ориентированных матриц инцидентности *B*, перестановочно эквивалентных между собой.

Матрица B размерности $n \times q$ с элементами b_{ij} называется ориентированной матрицей инцидентности для графа G с множеством вершин $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ и множеством дуг $R = \{r_1, r_2, ..., r_q\}$, если $b_{ij} = 1$, когда вершина v_i инцидентна началу дуги r_j (когда вершина v_i совпадает с первым элементом пары r_j), $b_{ij} = 0$ когда v_i не инцидентна дуге r_j и $b_{ij} = -1$, когда вершина v_i инцидентна концу дуги r_j (когда вершина v_i совпадает со вторым элементом пары r_j).

Способы задания графа





Задание рисунком

1	2,	3,	4
2	3		
3	4		
4	5		
5	1		

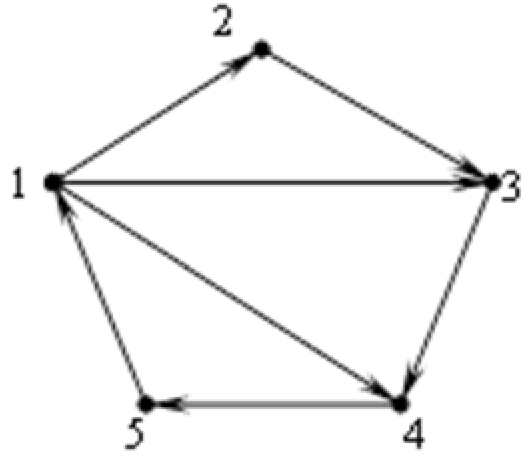
I	II,	III,	V
II	IV		
III	V		
IV	I		
V	II		

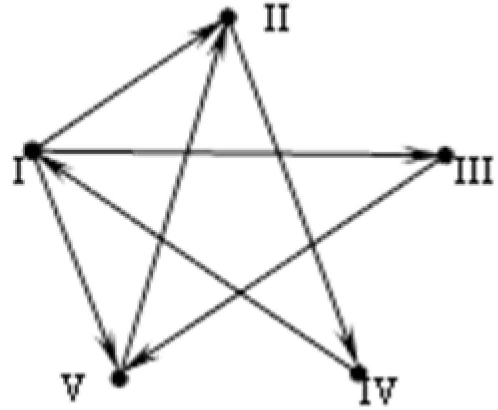
Задание списком

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Задание матрицами

Способы задания графа





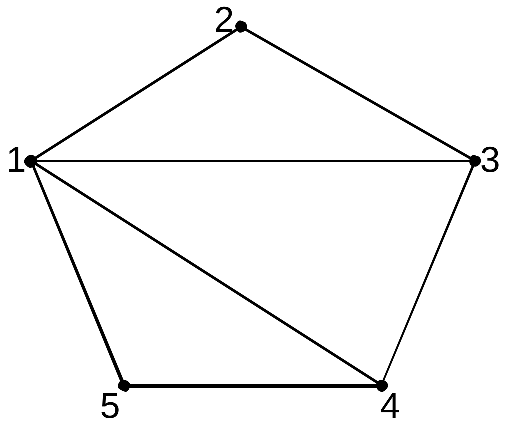
Задание рисунком

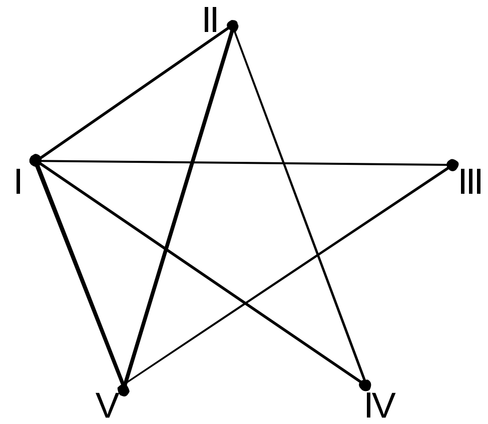
Задание матрицами инциденций

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Способы задания графа





Задание рисунком

1	2,	3,	4,	5
2	1,	3		
3	1,	2,	4	
4	1,	3,	5	
5	1,	4		

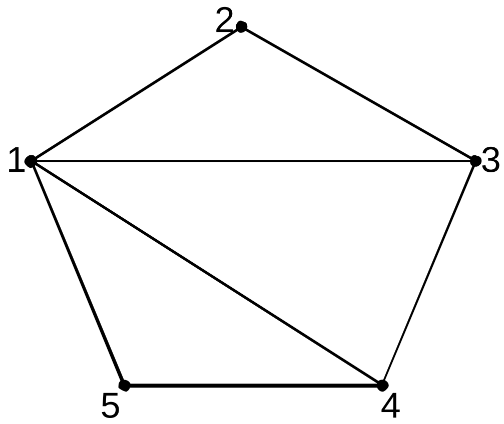
I	II,	III,	IV,	V
II	I,	IV,	V	
III	I,	V		
IV	I,	II		
V	I,	II,	III	

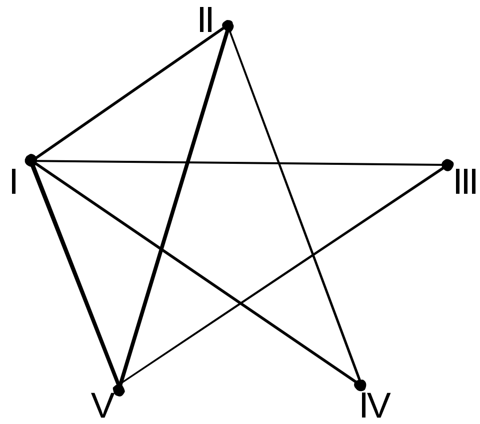
Задание списком

$$\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Задание матрицами

Способы задания графа





Задание рисунком

Задание матрицами инциденций

$$\tilde{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$