Ведение в теорию графов
Лекция по материалам сайта «ГрафоMann»

Определение. *Графом* называется простейшая модель связанной системы, т. е. некоторая выделенная совокупность объектов, между каждой парой элементов которой установлено наличие или отсутствие связи. Если кроме факта связи устанавливается и её направление (ориентация связи), то граф называется *ориентированным*. Неориентированный граф легко моделируется ориентированным: факт наличия связи между двумя различными элементами моделируется двумя ориентированными связями – связью «туда» и связью «обратно».

Мы будем рассматривать конечные связанные системы, т.е. *конечные графы*. Кроме того, мы будем допускать связь не только между некоторыми различными элементами, но и некоторых элементов самих с собой. Графы, допускающие только простые (однократные) связи и только между различными элементами будем называть *обыкновенными*.

Теория графов – наука, которая занимается изучением свойств графов и различными способами их математического моделирования (различными способами их интерпретации).

Различные способы математического моделирования графов ведут к различным разновидностям определений графов. Но чтобы привести эти определения нужно или до, или в процессе этих определений, ввести ряд понятий, в терминах которых мы и хотим описывать графы. Так элементы связанной системы, составляющей граф, мы будем называть *вершинами*, а две различные вершины будем называть *смежными*, если между ними существует связь. Для того, чтобы как-то производить различие между вершинами графа, мы будем их нумеровать (помечать). Понятно, что вершины графа мы можем нумеровать различным образом. Один и тот же граф с различным образом помеченными вершинами будем называть различными *представителями* графа, и рассматривать их как разные объекты. Очевидно, что различные представители графа *изоморфны*, т.е. между их вершинами существует взаимнооднозначное соответствие, сохраняющее смежность вершин. Про различные представители графов мы, вообще говоря, не знаем, являются они представителями одного графа (представители изоморфны) или разных (представители неизоморфны). Проверка изоморфизма даже для графов с несколькими десятками вершин является чрезвычайно трудной задачей (трудно реализуема в приемлемое время). Она называется *проблемой изоморфизма графов*.

Перейдем к определениям графа. Для этого определим способы моделирования связи и элементов связанной системы. Элементы мы уже назвали вершинами. Мы их можем моделировать точками на плоскости. В этом случае связь между любыми двумя вершинами мы можем моделировать направленным или ненаправленным отрезком кривой. Уже при этом способе моделирования мы видим, что граф моделируется двумя множествами – множеством вершин и множеством отрезков, которые для удобства будем различать в названиях. Так направленные отрезки будем называть дугами, а ненаправленные ребрами. Причем, вершину, ограничивающую ребро, мы будем называть инцидентной этому ребру (дуге), и наоборот. Задать граф, таким образом, означает задать множество вершин и отношение смежности (с учетом направления) между некоторыми из них. Или, задать два множества: множество вершин и множество ребер (дуг) и отношение инцидентности между элементами этих множеств. Такой способ моделирования связанной системы будем называть геометрическим, а соответствующее ему определение графа – *геометрическим*.

Другой способ моделирования связанной системы состоит в следующем. Мы моделируем элементы, составляющую систему, как элементы некоторого множества вершин V, а ненаправленные связи (ребра) между некоторыми парами вершин, как двухэлементные подмножества множества вершин. В этом случае две вершины называются смежными, если они принадлежат одному и тому же двухэлементному подмножеству. Вершина и ребро (двухэлементное подмножество) называются инцидентными друг другу, если вершина принадлежит этому ребру.

Аналогично с ненаправленными моделируются направленные связи связанной системы, как упорядоченные двухэлементные подмножества, точнее как упорядоченные пары. Последние два способа моделирования связанной системы называются теоретико-множественными и приводят нас к теоретико-множественным определениям графа.

Отталкиваясь от теоретико-множественного определения ориентированного графа легко перейти к матричному определению графа. Действительно, любая упорядоченная пара-дуга (v_i, v_j) заданного n-элементного множества вершин $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, вернее её наличие или отсутствие в описании связанной системы, однозначно определяется значением 1 или 0 соответственно на (i,j)-ом месте квадратной матрицы порядка n. Такую матрицу, поскольку она моделирует смежность вершин, называют матрицей смежности графа.

Точно также с помощью матрицы мы можем моделировать инцидентность вершин и ребер, вершин и дуг. Это приведет нас к соответствующим определениям неориентированного и ориентированного графа через так называемые матрицы инцидентности (или матрицы инциденций).

Матрица *B* размерности $n \times m$ с элементами b_{ij} называется матрицей инцидентности для графа G с множеством вершин $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ и множеством ребер $X = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$, если $b_{ij} = 1$, когда вершина v_i инцидентна ребру x_j и $b_{ij} = 0$ в противном случае.

Матрица *B* размерности $n \times q$ с элементами b_{ij} называется ориентированной матрицей инцидентности для графа G с множеством вершин $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ и множеством дуг $R = \{r_1, r_2, ..., r_q\}$, если $b_{ij} = 1$, когда вершина v_i инцидентна началу дуги r_j (когда вершина v_i совпадает с первым элементом пары r_j), $b_{ij} = 0$ когда v_i не инцидентна дуге r_j и $b_{ij} = -1$, когда вершина v_i инцидентна концу дуги r_j (когда вершина v_i совпадает со вторым элементом пары r_j).

Учитывая однозначное соответствие между квадратными матрицами и линейными операторами, между прямоугольными матрицами и линейными отображениями мы можем определить графы как специальные линейные операторы и специальные линейные отображения.

Перейдем к разным формулировкам определений графа, соответствующих различным видам его моделирования.

Геометрическое – графом называется фигура, состоящая из точек, называемых *вершинами*, и отрезков, соединяющих некоторые из этих вершин. Соединяющие отрезки могут быть направленными (*дугами* - случай ориентированного графа), ненаправленными (*ребрами* - случай неориентированного графа), прямолинейными или криволинейными. Отрезок, соединяющий вершину с самой собой, называется *петлей*.

Теоретико-множественное 1 – *ориентированным графом* называется пара (V,R), где V – некоторое конечное множество, элементы которого называются *вершинами*, а $R \subseteq V \times V$, т.е. некоторое подмножество декартова произведения множества V на себя, или бинарное отношение на V. Элементы множества R , т.е. упорядоченные пары $(u, v) \in R$ (где $u, v \in V$) соответствуют *дугам* предыдущего определения. Обозначается граф обычно через G(V,R).

Теоретико-множественное 2 – *неориентированным графом* называется пара (V,X), где элементы множества V называются вершинами, а элементы множества X –

некоторые двухэлементные подмножества множества V, называются ребрами. Обозначается обыкновенный граф обычно через G(V,X).

(Множество X можно описать следующим образом: $X \subseteq \Omega$, где $\Omega = \{\{u,v\} \mid u,v \in V\}$).

Матричное 1 – *ориентированным графом называется множество (класс) квадратных (0,1)-матриц, перестановочно подобных между собой*. (Две квадратные матрицы называются перестановочно подобными (Р-подобными), если от одной к другой можно перейти с помощью перестановки рядов, т.е. с помощью перестановки строк и такой же перестановки столбцов.) Матрицы, фигурирующие в этом определении, называются *матрицами смежности графа*.

Матричное 2 – *обыкновенным неориентированным графом называется множество (класс) (0,1)-матриц инцидентности B, перестановочно эквивалентных между собой*. Матрицы В характеризуются тем, что у них все столбцы различные и у каждого столбца только два элемента равны 1, а все остальные элементы столбца равны 0. Две матрицы инциденций называются *перестановочно эквивалентными*, если одна может быть получена из другой с помощью некоторой перестановки строк и некоторой перестановки столбцов (подробнее о матрицах инциденций, их связи с матрицами смежности, связи перестановочной эквивалентности с перестановочным подобием – смотри Продолжение 14).

Матричное 3 – *обыкновенным ориентированным графом называется множество (класс) ориентированных матриц инцидентности B, перестановочно эквивалентных между собой*. Ориентированные матрицы инцидентности *B* характеризуются тем, что у них все столбцы различные и у каждого столбца только два элемента отличны от нуля, один из которых равен единице, а другой – минус единице.

Замечание 1. Матричные определения 1 2 и 3 отличаются от предыдущих тем, что определяют граф как класс объектов (матриц). Это объясняется тем, что при матричном моделировании связей приходится указывать привязку связываемых элементов двух экземпляров одного множества (в первом случае) и двух разных множеств (во втором и третьем случаях) к месту в матрице. Говоря проще – при матричном моделировании связываемые элементы должны быть пронумерованы. Поскольку элементы могут быть пронумерованы различными способами, то появляется необходимость говорить о графе, как о некотором классе (множестве) моделирующих данный граф объектах.

Замечание 2. Матричное определение 1 позволяет включить в определение графа как псевдографы (графы с петлями), так и неориентированные графы. В последнем случае учитывается, что неориентированный граф моделируется ориентированным, и что его матрица смежности будет симметричной.

Замечание 3. Матричные определения 2 и 3 не позволяют обобщения графа на псевдографы, однако если в этом определении отказаться от требования различия столбцов мы получим обобщение определений обыкновенных графов на мультиграфы (графы с кратными связями).

Замечание 4. Отношение перестановочного подобия и отношение перестановочной эквивалентности являются частными случаями бинарного отношения эквивалентности и, следовательно, позволяют разбить соответствующие множества на непересекающиеся подмножества эквивалентных между собой элементов (матриц).

В соответствии с тремя различными способами заданий связей элементов графа - геометрического – рисунком, теоретико-множественного – множеством с заданной на нем системой двухэлементных подмножеств и матричного – и существуют различные способы задания и различные варианты определения графа.

Первое и на наш взгляд самое простое задание графа – это представление его с помощью картинки в соответствии с геометрическим определением графа. При этом, в соответствии с договоренностью выше, вершинам конкретного представления графа будут приписаны номера.

Так на рисунках 1 и 2 даны по два представления одного и того же графа.

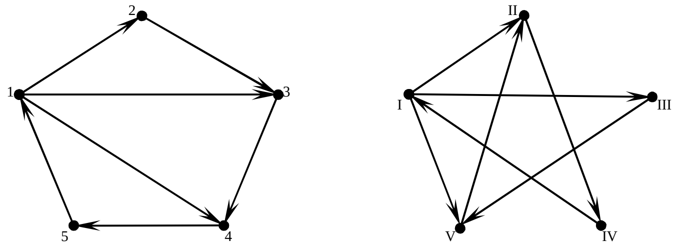

Рисунок 1

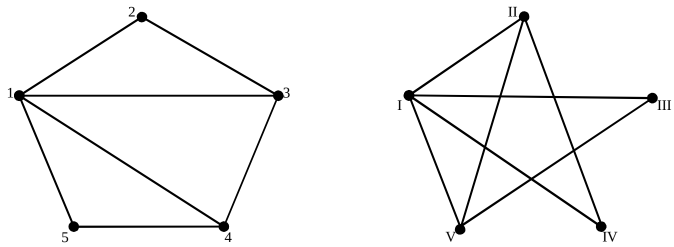

Рисунок 2

Другое задание графа - списком. Можно считать, что в соответствии с теоретико-множественным определением 1 графа все элементы множества $R \subseteq V \times V$, входящего в это определение, т.е. упорядоченные пары, упорядочены сначала по первым элементам пар, а затем по вторым, в соответствии с нумерацией элементов множества V. Тогда два представления графа с рисунка 1 будут заданы двумя списками:

1	2, 3, 4
2	3
3	4
4	5
5	1

I	II, III, V
II	IV
III	V
IV	I
V	II

Два представления графа с рисунка 2 будут заданы списками:

1	2, 3, 4, 5
2	1, 3
3	1, 2, 4
4	1, 3, 5
5	1, 4

I	II, III, IV, V
II	I, IV, V
III	I, V
IV	I, II
V	I, II, III

(В первых столбцах таблиц – первые элементы пар, затем по строкам, списком, через запятую, идут вторые элементы).

Два представления графа с рисунка 1 будут заданы также своими множествами R:

$R = \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(3,4),(4,5)\}$ - в первом случае,

$R = \{(I,II),(I,III),(I,IV),(I,V),(II,IV),(II,V),(III,V)\}$- во втором случае.

Два представления графа с рисунка 2 будут заданы также своими множествами X:

$X = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,5\}\}$ - в первом случае,

$X = \{\{I,II\},\{I,III\},\{I,IV\},\{I,V\},\{II,IV\},\{II,V\},\{III,V\}\}$ - во втором случае.

Третье задание графа – матрицами. Ниже, в соответствии с матричным определением 1, выписаны две матрицы смежности - A_1 и A_2, задающие два представления графа с рисунка 1:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

и две матрицы смежности $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2$, задающие два представления графа с рисунка 2:

$$\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Графы с рисунка 1 могут быть заданы своими ориентированными матрицами инциденций B_1 и B_2:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(Нумерация дуг произведена в том порядке, в котором пары, задающие дуги, выписаны в соответствующих множествах R).

Графы с рисунка 2 могут быть заданы своими матрицами инциденций $\tilde{B}_1$ и $\tilde{B}_2$:

$$\tilde{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{B}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Нумерация ребер произведена в том порядке, в котором пары, задающие ребра, выписаны в соответствующих множествах X).

Представления графа в соответствии с различными видами определений будем называть различными видами представлений. Между различными видами представлений графа существует взаимнооднозначное соответствие. Действительно, поскольку речь идет о представлении графа, то множество вершин можно считать пронумерованным. Тогда дуге графа с рисунка 1, идущей из вершины i в вершину j будет соответствовать упорядоченная пара (i, j) или, что то же самое, в списке вершины i будет присутствовать вершина j, а в матрице смежности $A = (a_{lk})$, представляющей граф, элемент $a_{ij} = 1$. Отсутствию дуги, идущей из вершины i в вершину j, будет соответствовать отсутствие вершины j в списке вершины i, а $a_{ij} = 0$. (Аналогично рассматриваются взаимнооднозначные соответствия для графов с рисунка 2).

В силу указанного выше взаимнооднозначного соответствия между различными видами представлений мы и можем воспользоваться различными определениями одного и того же понятия – граф. При этом при изучении различных свойств графа можно каждый раз пользоваться тем языком, который наиболее удобен для описания выбранного свойства. Вероятно, не следует выбирать один из языков в качестве единственного языка теории графов. Иногда для описания того или иного свойства, атрибута графа, требуется конкретный язык. Так если мы говорим о плоском (планарном) графе, то нам по необходимости приходится использовать геометрический язык теории графов. Если же мы говорим о «спектре» графа, то мы формулируем это понятие на матричном языке.

Рассмотрим специфику различных видов определений графа. Исторически геометрическое определение графа было первым. Поэтому много терминов теории графов несут на себе печать этого определения: вершина, дуга, ребро, путь, маршрут, цикл, остов, дерево, грань, корень, плоский граф, укладка графа, точки сочленения, мосты и т.д. Использование других видов определений добавляет в теорию графов как новые термины, присущие тому или иному разделу математики (например, спектр графа - от спектра матриц), так и приводит к новым формулировкам старых терминов. Поэтому с течением времени разноголосица в теории графов не уменьшается, а даже увеличивается. Это особенно видно, если учесть, что от простейшей модели связанной системы всё время стараются перейти к чуть более усложнённой. Например, от модели, у которой нет никаких предположений относительно связей элементов, к моделям, связям в которых приписаны числовые характеристики – веса. Графы с такими свойствами называют взвешенными графами или сетями.

На рисунках 1 и 2 нарисовано по 2 изоморфных между собой графа. Возьмем для примера рисунок 2 и отметим для себя, чем отличаются левый и правый графы на этом рисунке. Левый граф нарисован так, что ребра этого графа пересекаются только в вершинах. На правом рисунке ребра пересекаются и в точках отличных от вершин. Эти графы изоморфны и по сути являются представителями одного графа. Граф на левом рисунке называется плоским (нарисован с пересечением ребер только в вершинах). Все графы изоморфные этому графу называются планарными (планарный граф – это граф, который может быть нарисован на плоскости в виде плоского графа). Определить является ли данный граф с большим числом (несколько сотен) вершин является достаточно трудной задачей. Рисование планарного графа на плоскости в виде плоского графа называется укладкой графа.

Укажем одно приложение планарных графов к важной задаче практики. Заметим, что граф «можно рассматривать как схему электрической сети, где ребрами служат провода, соединяющие различные пункты. Один из наиболее эффективных способов массового производства стандартных электрических схем для радио- и телевизионных приемников состоит в том, что схема наносится печатным способом в виде металлической фольги на бумажную или пластмассовую основу. Однако для того, чтобы это было осуществимо, граф рассматриваемой сети проводов должен иметь плоское представление; ведь пересечение двух ребер привело бы к короткому замыканию в системе». Это - цитата из переводной книги [5, стр. 26], появившейся в свет в середине 60-х годов прошлого столетия. В век компьютеров и мобильных телефонов автор цитируемого текста наверняка мог бы заявить, что планарные графы лежат в основе современной цивилизации.

[Связь укладки графов с задачей Штейнера. Примеры: двухточечная, трех точечная и четырех точечные задачи.]

Выше мы коснулись геометрического определения графа. Теоретико-множественное определение было исторически следующим, и оно связано с именем конкретного математика, а именно К. Бержа. Это определение графа по сей день является господствующим в теории графов.

К появлению того или иного определения графа обычно приводит необходимость решения той или иной трудной графовой задачи (проблемы), а также обнаружения того или иного математического аппарата, с помощью которого удается существенно продвинуться в решении этих задач. Так матричное определение графа обязано своим появлением тому, что на языке матриц смежности легко формулируется определение изоморфизма графов: два графа изоморфны, если их матрицы смежности перестановочно подобны или, по-другому, Р-подобны (определение Р-подобия смотри выше). Поскольку определение изоморфизма связано с преобразованием P-подобия, то изоморфизм связывается с инвариантами относительно этого преобразования. Так через матричные инварианты преобразования P-подобия удается существенно продвинуться в решении проблемы изоморфизма графов.

Матричное определение графа позволяет вести речь о нормальной форме графа (нормальной форме его матрицы смежности относительно преобразования P-подобия).

Матричное определение 2 позволяет предложить эффективные алгоритмы вершинной и реберной раскрасок графа, а также решить задачу описания всех путей ведущих из i-ой вершины в j-ую. Причем решать эти задачи можно с помощью булевой арифметики или арифметики по модулю 2.

Матричное определение 3 (точнее представление графа как линейного отображения пространства дуг в пространство вершин) позволяет решать задачу описания всех путей ведущих из i-ой вершины в j-ую в ориентированном графе. Решение этой задачи сводится к решению системы линейных алгебраических неоднородных уравнений над полем по модулю 3.