Робастная устойчивость полиномов от одной и нескольких переменных

В.Л. Харитонов

кафедра теории управления

30 сентября 2010

План:

Полиномы от одной переменной

- полиномы Гурвица
- свойства полиномов Гурвица
- параметрические семейства полиномов
- задача робастной устойчивости
- пример Ackermann’a
- теорема об устойчивости интервального полинома

Полиномы от нескольких переменных

- основные понятия и определения
- классы устойчивых полиномов
- свойства устойчивых полиномов
- задача робастной устойчивости
- теорема об устойчивости интервального полинома

Заключение

Полиномы от одной переменной

$$
\begin{aligned}
p(s) &= a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} \ldots + a_n \\
&= a_0 (s - s_1)(s - s_2)\cdots(s - s_n), \quad a_0 > 0;
\end{aligned}
$$

$$
p(s) \quad \Leftrightarrow \quad \mathsf{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}
$$

Полиномы Гурвица

Определение: Полином $p(s)$ называется полиномом Гурвица если

$$p(s_0) \neq 0, \quad \forall s_0 \in \Gamma_1 = \left\{ s \;\middle|\; \mathrm{Re}(s) \geq 0 \right\}.$$

Критерий Гурвица

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & \cdots & a_{n-2} & a_n \end{pmatrix},$$

$$\Delta_1 = a_1 > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \ldots, \Delta_n = \det(H) > 0.$$

Свойства полиномов Гурвица

- Условие Stodola: $a_j > 0, \quad j = 0,1,\dots,n.$

- Если $p(s)$ полином Гурвица, то и полином

$$s^n p(s^{-1}) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n$$

является полиномом Гурвица.

- Если $p(s)$ полином Гурвица, то и полином

$$p_1(s) = \frac{dp(s)}{ds}$$

является полиномом Гурвица.

Параметрические семейства

$$p(s, q_1, \ldots, q_l) = \sum_{k=0}^{n} a_k(q_1, \ldots, q_l) s^{n-k}$$

$$\mathrm{q} = (q_1, \ldots, q_l), \quad p(s, \mathrm{q}), \quad \mathrm{a} = \mathrm{a}(\mathrm{q}).$$

Задача робастной устойчивости

Заданы параметрическое семейство полиномов $p(s,\mathrm{q})$
и множество допустимых значений параметров $Q \in R^l$.
Требуется найти условия при выполнении которых все полиномы семейства

$$\{\, p(s,\mathrm{q}) \mid \mathrm{q} \in Q \,\}$$

являются полиномами Гурвица.

Пример Ackermann'a

$$p(s,q_1,q_2) = s^3 + (2+q_1+q_2)s^2 + (2+q_1+q_2)s + (2+6q_1+6q_2+2q_1q_2),$$

$$Q = [0,2]\times[0,2];$$

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ 1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix},$$

$$\Delta_1 = a_1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = (q_1-1)^2 + (q_2-1)^2,\ \Delta_3 = a_3\Delta_2.$$

Интервальный полином

$$I = \left\{ p(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n \;\middle|\; a_k \in [\alpha_k, \beta_k], k = 0,1,\ldots, n \right\}$$

Теорема об устойчивости интервального полинома

Теорема: Интервальный полином робастно устойчив тогда и только тогда, когда следующие четыре полиномы являются полиномами Гурвица

$$p^{(1)}(s) = \alpha_0 s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \beta_2 s^{n-2} + \beta_3 s^{n-3} + \alpha_4 s^{n-4} + \alpha_5 s^{n-5} + \beta_6 s^{n-6} + \ldots$$

$$p^{(1)}(s) = \alpha_0 s^n + \beta_1 s^{n-1} + \beta_2 s^{n-2} + \alpha_3 s^{n-3} + \alpha_4 s^{n-4} + \beta_5 s^{n-5} + \beta_6 s^{n-6} + \ldots$$

$$p^{(1)}(s) = \beta_0 s^n + \beta_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \alpha_3 s^{n-3} + \beta_4 s^{n-4} + \beta_5 s^{n-5} + \alpha_6 s^{n-6} + \ldots$$

$$p^{(1)}(s) = \beta_0 s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \beta_3 s^{n-3} + \beta_4 s^{n-4} + \alpha_5 s^{n-5} + \alpha_6 s^{n-6} + \ldots$$

Полиномы от нескольких переменных

Полином от *m* переменных

$$p(s_1, s_2, \dots, s_m) = \sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} \dots \sum_{k_m=0}^{n_m} a_{k_1 k_2 \dots k_m} s_1^{n_1-k_1} s_2^{n_2-k_2} \cdots s_m^{n_m-k_m}$$

$$\mathrm{s} = (s_1, s_2, \dots, s_m)$$

$$p(\mathrm{s}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{a} = \begin{pmatrix} a_{00\dots0} \\ a_{10\dots0} \\ \vdots \\ a_{00\dots1} \\ \vdots \\ a_{n_1 n_2 \dots n_m} \end{pmatrix}, \quad N = (n_1+1)(n_2+1)\cdots(n_m+1)$$

Степень полинома

$$\partial eg_j(p) = n_j \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, a_{\ldots k_{j-1} 0 k_{j+1}\ldots} \neq 0$$

$$\deg(p) = \left(\partial eg_1(p), \partial eg_2(p), \ldots, \partial eg_m(p)\right)$$

$$P_{n_1 n_2 \ldots n_m} = \left\{\, p(\mathrm{s}) \;\middle|\; \deg(p) = (n_1, n_2, \ldots, n_m) \,\right\}$$

Корни полинома

Корни

$$p(\mathsf{s}^{(0)}) = 0, \qquad \mathsf{s}^{(0)} = (s_1^{(0)}, s_2^{(0)}, \dots, s_m^{(0)})$$

$$s_j^{(0)} \in \mathrm{C}, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Общие корни и общие множители

$$p_1(s_1, s_2) = s_1 + s_2, \quad p_2(s_1, s_2) = s_1 s_2,$$

$$p_1(0,0) = p_2(0,0) = 0.$$

Старшие коэффициенты

$$p(\mathrm{s}) = \sum_{j=0}^{n_k} a_j^{(k)}(\ldots, s_{k-1}, s_{k+1}, \ldots) s_k^{n_k - j}, \quad k = 1, 2, \ldots, m;$$

$$a_0^{(k)}(\ldots, s_{k-1}, s_{k+1}, \ldots), \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Корневые многообразия

$$p(s_1, s_2^{(0)}, \ldots, s_m^{(0)}) = \sum_{j=0}^{n_1} a_j^{(1)}(s_2^{(0)}, \ldots, s_m^{(0)}) s_1^{n_1 - j}$$

Зависимость корней от коэффициентов

Лемма: Пусть $p_0(\mathsf{s}^{(0)}) = 0.$

Обозначим через $\mathsf{a}^{(0)}$ вектор коэффициентов $p_0(\mathsf{s})$.

Для $\forall \varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$: каждый полином $p(\mathsf{s})$,

вектор коэффициентов которого a

находится в δ - окрестности $\mathsf{a}^{(0)}$:

$$\left\| a - a^{(0)} \right\| < \delta,$$

имеет корень в ε - окрестности $\mathsf{s}^{(0)}$.

Устойчивость в сильном смысле

Запретная область

$$\Gamma_m = \{ (s_1, s_2, ..., s_m) \mid \mathrm{Re}(s_j) \geq 0,\ j = 1,2,...,m \}$$

Полиномы устойчивые в сильном смысле

$$p(\mathrm{s}) \in SSS \quad \Leftrightarrow p(\mathrm{s}^{(0)}) \neq 0, \forall\, \mathrm{s}^{(0)} \in \Gamma_m.$$

Пример: $p_0(s_1, s_2) = s_1 s_2 + s_1 + 1,$

$$\operatorname{Re}(s_2^{(0)}) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Re}(s_1^{(0)}) = \operatorname{Re}\left(-\frac{1}{1+s_2^{(0)}}\right) < 0.$$

полином устойчив в строгом смысле,

а для $\varepsilon > 0$ полином $p_\varepsilon(s_1, s_2) = s_1 s_2 + s_1 - \varepsilon s_2 + 1$ нет.

Устойчивые полиномы

Определение:

1. $m=1$: полином $p(s_1)$ степени называется устойчивым, если он является полиномом Гурвица;
2. $m>1$: полином $p(s_1, s_2, \ldots s_m) \in P_{n_1 n_2 \ldots n_m}$ называется устойчивым, если выполнены условия

   а) $p(s_1, s_2, \ldots, s_m)$ устойчив в строгом смысле;

   б) старший коэффициент в разложении $p(s_1, s_2, \ldots, s_m)$ по каждой из переменных является устойчивым полиномом от $(m-1)$ переменной, частные степени которого совпадают с соответствующими частными степенями исходного полинома.

Свойства устойчивых полиномов

1. Если в устойчивом полиноме зафиксировать часть переменных так, чтобы вещественные части зафиксированных переменных были неотрицательны, то получим устойчивый полином от оставшихся переменных, частные степени которого совпадают с соответствующими частными степенями исходного полинома.

2. Если полином $p(s_1, s_2, \dots s_m) \in P_{n_1 n_2 \dots n_m}$ устойчив, то устойчив и полином

$$p_k(s_1, s_2, \dots, s_m) = s_k^{n_k} p(s_1, \dots, s_{k-1}, \frac{1}{s_k}, s_{k+1}, \dots, s_m).$$

Кроме того $\deg(p) = \deg(p_k)$.

3. Если полином $p(s_1, s_2, \ldots s_m) \in P_{n_1 n_2 \ldots n_m}$ устойчив, то и полином

$$\frac{\partial p(s_1, s_2, \ldots, s_m)}{\partial s_k} \in P_{n_1 \ldots n_{k-1} (n_k - 1) n_{k+1} \ldots n_m}$$

устойчив.

4. Если полином $p(s_1, s_2, \ldots s_m) \in P_{n_1 n_2 \ldots n_m}$ устойчив, то все его коэффициенты в разложении по каждой из переменных устойчивы, а их частные степени совпадают с соответствующими частными степенями исходного полинома.

5. Все коэффициенты $a_{k_1 k_2 \ldots k_m}$ устойчивого полинома положительны (отрицательны).

6. Пусть полином $p(s_1, s_2, \dots s_m) \in P_{n_1 n_2 \dots n_m}$ устойчив. Тогда найдется $\varepsilon > 0$ такое, что все полиномы векторы коэффициентов которых лежат в ε-окрестности вектора коэффициентов полинома $p(s_1, s_2, \dots s_m)$ будут устойчивыми полиномами из $P_{n_1 n_2 \dots n_m}$

Устойчивость интервального полинома

Теорема: Интервальный полином

$$q = a,$$

$$I = \left\{ p(s, q) \middle| \; a_{k_1 k_2 \dots k_m} \in [\alpha_{k_1 k_2 \dots k_m}, \beta_{k_1 k_2 \dots k_m}], k_j = 0,1,\dots,n_m;\; j = 1,2,\dots,m \right\}$$

робастно устойчив тогда и только тогда, когда $4 \cdot 2^m$ полиномов отвечающих специальным вершинам множества

$$Q = \prod_{k_1=0}^{n_1} \times \prod_{k_2=0}^{n_2} \times \dots \times \prod_{k_m=0}^{n_m} [\alpha_{k_1 k_2 \dots k_m}, \beta_{k_1 k_2 \dots k_m}]$$