Введение в теорию экстремальных задач

Демьянов Владимир Федорович, Тамасян Григорий Шаликович

Санкт-Петербургский государственный университет
факультет прикладной математики-процессов управления
кафедра математической теории моделирования систем управления

Санкт-Петербург, 7 октября 2010

Леонард Эйлер

"... в мире не происходит ничего, в чем бы не был виден смысл какого-нибудь максимума или минимума ..."

Герон Александрийский

"... природа действует *кратчайшим путем* ..."

Задача Герона. По одну сторону от дороги имеются детский садик и школа. Требуется найти, где установить автобусную остановку, чтобы сумма расстояний от остановки до детского садика и школы была наименьшей.

Задача о желобе. Из прямоугольного листа железа, ширина которого d, делают желоб прямоугольного сечения. С этой целью по краям листа отгибают полосы. Какой ширины должны быть эти полосы, чтобы получился желоб с наибольшей пропускной способностью?

Пьер Ферма

"... в неоднородной среде свет избирает такую траекторию, вдоль которой время, затрачиваемое им на преодоление пути от одной точки к другой, минимально."

Теорема Ферма (около 1630 г.)

В точке экстремума производная равна нулю, и потому экстремумы следует искать среди корней производной.

Пифагор

"Прекраснейшим телом является шар, а прекраснейшей плоской фигурой — круг"

Древнейшая задача - задача Дидоны. Среди замкнутых плоских кривых, имеющих заданную длину, найти кривую, охватывающую максимальную площадь.

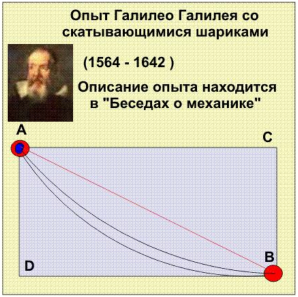
Эту задачу называют классической изопериметрической задачей.

Определение

Изопериметрические фигуры - это фигуры, имеющие одинаковый периметр.

В 1696 году в первом научном журнале "Acta Eruditorum" была помещена заметка знаменитого швейцарского ученого Иоганна Бернулли с интригующим заглавием "Новая задача, к решению которой приглашаются математики". **Задача о брахистохроне.**

В вертикальной плоскости даны точки A и B, не лежащие на одной вертикальной или горизонтальной прямой. Определить форму желоба, спускаясь (без трения) по которому под действием собственной тяжести, тело M, начав двигаться из точки A, достигнет точки B в кратчайшее время.



Галилео Галилей

Если начальная и конечная точки движения одинаковы, то поскольку прямая есть кратчайшее расстояние между ними, то можно было бы думать, что движение, совершающееся по ней, требует наименьшего времени. На самом деле это не так.

Задача обработки эмпирических данных.

Пусть задана таблица значений некоторой функции:

$$y_k = y(t_k), \quad k = \overline{0, N}.$$

Требуется выбрать среди всех алгебраических полиномов

$$P_n(A, t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k,$$

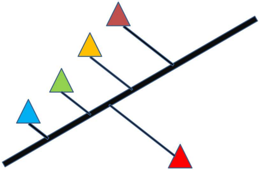
где $A = (a_0, \ldots, a_n)$, такой алгебраический полином $P_n(A^*, t)$, который ***достаточно хорошо*** аппроксимирует таблицу.

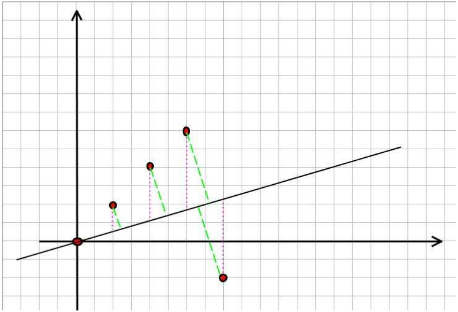
$$\max_{k \in \overline{0,N}} |y_k - P_n(A, t_k)| \to \min_{A \in R^n}, \tag{1}$$

$$\sum_{k=0}^{N} (y_k - P_n(A, t_k))^2 \to \min_{A \in R^n}. \tag{2}$$

Если $n = N$, то полиномом наилучшего приближения будет интерполяционный полином.

Задача Кларка.



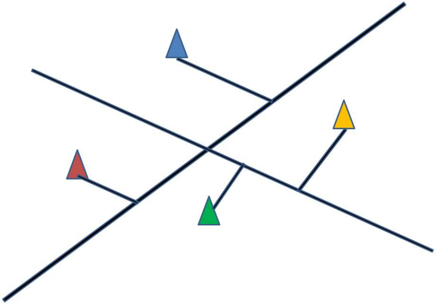


$$F_1(a,b)=\sum_{k=1}^{5}|at_k+b-y_k|,\qquad \widetilde{F}_1(a,b,c)=\sum_{k=1}^{5}|at_k+by_k+c|,$$

$$F_2(a,b)=\sum_{k=1}^{5}(at_k+b-y_k)^2,\qquad \widetilde{F}_2(a,b,c)=\sum_{k=1}^{5}(at_k+by_k+c)^2,$$

$$F_3(a,b)=\max_{k=\overline{1,5}}|at_k+b-y_k|,\qquad \widetilde{F}_3(a,b,c)=\max_{k=\overline{1,5}}|at_k+by_k+c|.$$

Задача Кларка 2.



$$F(a_1, b_1, d_1, a_2, b_2, d_2) = \sum_{k=1}^{4} \min\{|a_1 t_k + b_1 y_k + d_1|, |a_2 t_k + b_2 y_k + d_2|\}.$$

Задача Мандельштама.

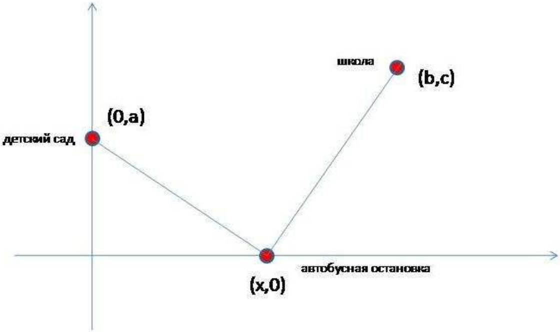
Подобная задача возникает в теории электрических цепей.
Пусть $X = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ и

$$F(X,t) = \left| \sum_{k=1}^{n} \cos(kt + x_k) \right|.$$

Среди всех $X \in R^n$ требуется найти вектор $X^* \in R^n$ такой, что

$$\max_{t \in [0,2\pi]} F(X^*, t) = \min_{X \in R^n} \max_{t \in [0,2\pi]} F(X,t)$$

Задача Герона.



$$F(x) = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(x-b)^2 + c^2} \to \min_{x \in R}.$$

$$F'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{x-b}{\sqrt{(x-b)^2 + c^2}} = 0.$$

Задача о желобе.

$$F(x) = (d - 2x)x \to \max_{x \in R}.$$

$$F'(x) = -4x + d = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{d}{4}.$$

Задача Кларка.

Пусть

t_k	0	1	2	3	4
y_k	0	1	2	3	-1

$$F_2(a,b) = \sum_{k=1}^{5} (at_k + b - y_k)^2 = 30a^2 + 20ab + 5b^2 - 20a - 10b + 15.$$

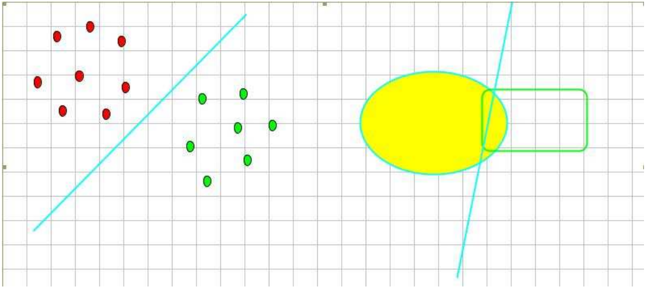
$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(a,b)}{\partial a} = 60a + 20b - 20 & = 0, \\ \dfrac{\partial F(a,b)}{\partial b} = 20a + 10b - 10 & = 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (a_2^*, b_2^*) = (0, 1).$$

$$F_1(a,b) = |b| + |a+b-1| + |2a+b-2| + |3a+b-3| + |4a+b+1|,$$
$$(a_1^*, b_1^*) = (1, 0).$$

$$F_1(a_1^*, b_1^*) = 5 < F_1(a_2^*, b_2^*) = 6$$

У функции $F_3(a,b)$ минимум достигается в точке $(a_3^*, b_3^*) = \left(-\dfrac{1}{4}, \dfrac{15}{8}\right)$.

Задача медицинской диагностики.



Даны два множества $A = co\{a_i\}$, $i = \overline{1, N_1}$ и $B = co\{a_j\}$, $j = \overline{1, N_2}$ (здесь $a_i,\ b_j \in R^n$).
Уравнение гиперплоскость $\rho(x, \ell, d) = (x, \ell) + d$.

$$F(\ell, d) = \frac{1}{N_1}\sum_{i=1}^{N_1}\max\{0, \rho(a_i, \ell, d)\} + \frac{1}{N_2}\sum_{j=1}^{N_2}\max\{0, -\rho(b_j, \ell, d)\} \to \min_{[\ell, d]\in R^{n+1},\ \|\ell\|=1}$$